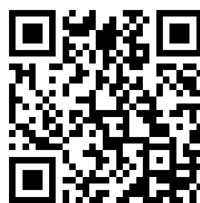
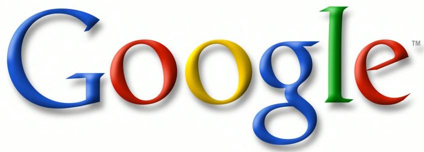
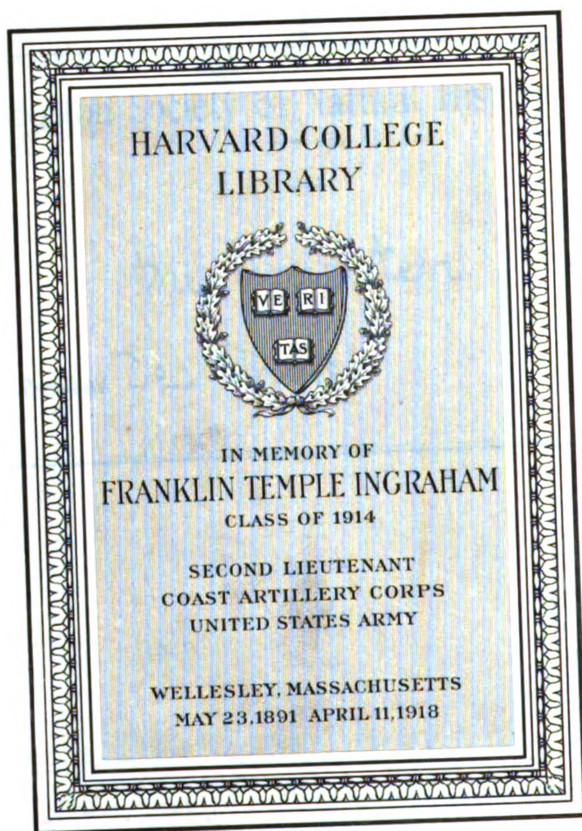





HARVARD COLLEGE
LIBRARY
VE RI
TAS
IN MEMORY OF
FRANKLIN TEMPLE INGRAHAM
CLASS OF 1914
SECOND LIEUTENANT
COAST ARTILLERY CORPS
UNITED STATES ARMY
WELLESLEY, MASSACHUSETTS
MAY 23,1891 APRIL 11,1918
TIFFANY & CO.

ÅRSSKRIFT

UTGIFVEN

AF

KONGL. VETENSKAPS-SOCIETETEN

I

UPSALA.

ANDRA ÅRGÅNGEN.



ÅRSSKRIFT

UTGIFVEN AF

KONGL. VETENSKAPS-SOCIETETEN

I UPSALA.

ÅRSSKRIFT

UTGIFVEN AF

KONGL. VETENSKAPS-SOCIETETEN I UPSALA.

ANDRA ÅRGÅNGEN.

UPSALA,
C. A. LEFFLER, KONGL. AKAD. BOKTRYCKARE.
1861.

Utdrag ur Stadga angående utgifvande af Kongl. Vetenskaps-Societetens Handlingar.

§. 1. Kongl. Vetenskaps-Societetens Handlingar komma att hädanefter i två särskilda afdelningar utgifvas. Den ena afdelningen utgöres af Acta Societatis Scientiarum Upsaliensis, hvari, efter samma plan som hittills, införas vetenskapliga, på latinska eller franska språket författade afhandlingar, hvilkas utgifvande förnämligast åsyftar att i utlandet bekantgöra resultater af sådana lärda forskningar, som ligga inom området af Societetens verksamhet. Såsom andra afdelningen utgifves en Årsskrift, upptagande sådana vetenskapliga afhandlingar och uppsatser, som höra till nämnde område, äro författade på svenska språket och anses kunna inom fäderneslandet befordra vetenskaplig bildning.

. . . .

. . . .

§. 4. Afhandling, som till införande i Societetens Handlingar inlemnas, skall remitteras till tvenne Ledamöter af den klass, till hvilken afhandlingen med afseende på sitt ämne hörer, och ega desse Ledamöter att efter verkställd granskning sig utlåta, huruvida afhandlingen bör i Societetens Handlingar upptagas, äfvensom, då den i detta hänseende godkännes, huruvida den bör i Acta eller i Årsskriften införas. Stadna vid denna pröfning de båda granskarne i olika meningar, hänskjutes afgörandet till samtlige i Upsala närvarande Ledamöter af den ifrågavarande klassen.

§. 5. Är afhandling, som i ofvan sagda ändamål inlemnad blifvit, författad på svenska språket, men befinnes med afseende på innehållet böra i Societetens Acta införas, må antingen Författaren eller Redaktions-Utskottet besörja dess öfversättning på det främmande språk, som pröfvas med ämnets beskaffenhet mest förenligt; är den åter författad på främmande språk, men anses mest passande för Årsskriften, må den till författaren återlemnas, för att på svenska språket öfverflyttas.

*§. 6. Åt Författare af afhandling, som sålunda blifvit genom Societetens försorg till trycket befordrad, lemnar Societeten ett redaktions-arfvode af 10 Rdr Rmt för hvarje tryckt ark *). Derjemte eger Societeten att, utom detta redaktions-arfvode, åt dem, som författat de bästa till Societeten i ofvannämnde ändamål inlemnade afhandlingar, årligen utdela ett pris å 300 Rdr Rmt och trenne å 150 Rdr Rmt, på sätt särskildt stadgadt är **).*

Tillägg:

Sedan Upsala Universitet beslutat utgifva en Akademisk Årsskrift, till plan och syfte lika med Societetens, så har Kongl. Vetenskaps-Societeten, för att icke onödigtvis splittra krafterna, beslutat att tills vidare och så länge utgifvandet af den Akademiska Årsskriften fortfar, låta sin egen Årsskrift hvila. Med utdelandet af Vetenskaps-Societetens priser förfares emedlertid på sätt ofvan stadgadt är, blott med den förändring i afseende på Årsskriften, att de prisbelönta afhandlingar, hvilka skolat i densamma upptagas, öfverlemnas till införande i den Akademiska Årsskriften. Skulle mot förmodan den sistnämnda upphöra, kommer Societetens Årsskrift att ånyo utgifvas.

**) För utförligare afhandlingar, hvilka det kan anses för en vinst för författarne att få tryckta, betalas redaktions-arfvode endast för de 10 första arken.*

***) Se särskild Stadga för bortgifvandet af K. Vetenskaps-Societetens pris (K. Vet.-Societetens Årsskrift, Första Årgången).*

Innehåll.



Geometrisk Kalkyl eller geometriska qvantiteters räknelagar

af

Göran Dillner.

Inledning.

De qvantiteter, som här benämnas *geometriska*, utgöra den analytiska geometriens qvantiteter.

Detta arbetes mål är att visa, att den analytiska geometrien icke vidare behöfver utgöra en "tillämpning" af algebrans qvantiteter på geometrien, utan att den har egna och sjelfständiga qvantiteter för sina räkningar.

Betydelsen af geometrisk qvantitet, sådan den förefinnes i detta arbete äfvensom i den analytiska geometrien, ligger till fullo gifven och bestämd i våra enklaste geometriska begrepp. Hvar och en vet, att, för att bestämma en punkts läge i rummet, behöfver han på förhand ha följande bestämningar fastställda: *ett plan*, *en utgångspunkt* (origo), *en riktning* i planet samt *ett enhetsmått.* Det är dessa fyra bestämningar, som i detta arbete kallas *grundbestämningar*, och hvilka alltid förutsättas för en geometrisk qvantitets verklighet. Det är vidare tydligt, att, om tvenne eller flera geometriska qvantiteter bestämma hvar sina punkter i rummet, så kan ingen inbördes jemförelse mellan dem ega rum, innan de blifvit reducerade till lika grundbestämningar. Det är lagarna för reduktioner till lika grundbestämningar äfvensom deraf härledda lagar, som i detta arbete kallas *geometriska qvantiteters* eller, som är detsamma, den analytiska geometriens *räknelagar.*

Dessa lagar motsvaras till en del, åtminstone så vidt det rör formen, af lagarna för algebrans operationer. Dessa motsvarigheter komma vi i det följande att framhålla så mycket heldre, som vi behöfva öfverflytta benämningarna från algebrans operationer på motsvarande räkningar här. Inom ett visst område (projektionerna) sammanfalla för öfrigt algebrans och geometriens kalkyler helt och hållet, hvarföre algebrans kalkyl för undvikande af alltför stor vidlyftighet i detta arbete förutsättes såsom känd.

I följd af arbetets ringa omfång har den analytiska tillämpningen af dessa räknelagar (N:is 9 & 13) måst inskränka sig till blotta antydningar och några enkla exempel. Af samma skäl är trigonometrien och läran om logarithmerna behandlad med förutsättning af redan gjord bekantskap med dessa delar af mathematiken.

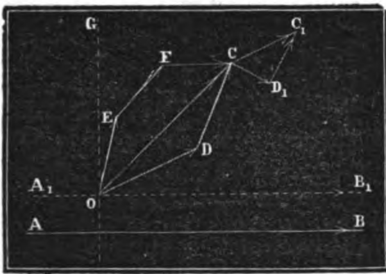
Förevarande arbete är hufvudsakligen ett resultat af betraktelser öfver de imaginära qvantiteternas theori, sådan den förefinnes i den allmänna mathematiken äfvensom uti Cauchys Exercices d'Analyse Tom. IV pag. 159 etc. Ty liksom de negativa qvantiteterna inom de abstrakta talens område eller arithmetiken icke gerna kunna hafva någon reel betydelse, utan för sin realitet häntyda på en ny kalkyl, nämligen den algebraiska, så ega icke heller de imaginära qvantiteterna inom algebran någon realitet, utan häntyda der på en ny kalkyl, nämligen den geometriska.

De bevis, som i detta arbete äro anbragta, stödja sig hufvudsakligen på elementär geometri och de abstrakta talens lagar, hvaraf tydligt nog inses, att en fullständig theori för den geometriska kalkylen låter utveckla sig, uteslutande stödd på nämde elementära delar af mathematiken.

1.

Förberedande förklaringar.

En punkt i ett plan är alltid bestämd till sitt läge, så snart vi deri känna hans afstånd från en gifven punkt samt detta afstånds riktning från en gifven riktning.



Punkten C är således bestämd till sitt läge, så snart vi känna hans afstånd från den gifna punkten O samt detta afstånds riktning från den gifna riktningen $A\,B$. Detta afstånd kan vara gifvet:

1:o efter rätliniga vägen $O\,C$, då punkten C:*s* läge är bestämdt, så snart vi känna räta linien $O\,C$:*s* *storlek* (längd) samt *riktning* från $A\,B$.

2:o efter någon af de brutna vägarna $O\,D\,C$ eller $O\,E\,F\,C$, då punkten C:*s* läge är bestämdt, så snart vi till *storlek* och *riktning* känna hvarje rätlinig del af den brutna vägen.

För enkelhetens skull låta vi en med $A\,B$ parallel linea $A_1\,B_1$ vara dragen genom den gifna punkten O, hvilken då representerar den gifna riktningen; och, för att ha punkten O gifven på $A_1\,B_1$, låta vi en rät linea $O\,G$ skära $A_1\,B_1$ i den nämnda punkten. Dessa tvenne hvarandra skärande linier kallas *axlar* eller *axelsystem*. Dessa axlar kallas *rätvinkliga*, om de bilda med hvarandra räta vinklar; *snedvinkliga* i hvarje annat fall. Den gifna punkten O kallas *origo* (grundpunkt) och den gifna riktningen $A\,B$ eller som är detsamma $A_1\,B_1$ *grundriktning*. Ett axelsystem representerar således: origo och grundriktning, som vi måste ha gifna, innan vi kunna bestämma en punkts läge i planet.

Hvarje rätlinig storhet i ett plan, hvilken, såsom utmärkande en punkts läge, har till nödvändiga bestämningar *storlek* (längd) och *riktning*, kallas *geometrisk qvantitet.*

Linien OC äfvensom hvarje rätlinig del af afstånden ODC och $CEFC$, såsom utmärkande hvarje föregående den efterföljandes origo och den siste punkten C sjelf, utgöra således geometriska qvantiteter.

En geometrisk qvantitet betecknas:

$$R_P,\ r_p,\ \varrho_\varphi,\ a_\alpha \quad \text{o. s. v.}$$

der R, r, ϱ, a o. s. v. beteckna *storlekar*, räknade från ett fastställdt origo samt hänförda till någon annan storlek såsom sin enhet, samt P, p, φ, α o. s. v. beteckna *riktningar*, räknade från grundriktningen.

Om en geometrisk qvantitets enhet vore en fastställd längd oa, så tecknas han egentligen $oa.R_P$, der R utgör ett tal. Vi undvika denna vidlyftighet i teckningen genom att sätta $oa = 1$, då vi således få $1.R$ eller, som är detsamma, R såsom representerande en geometrisk qvantitets storlek.

Origo, grundriktning och enhet, hvilka vi ega att efter godtfinnande och behof på förhand fastställa, för att ha den geometriska qvantiteten fullt verklig till sin betydelse, kallas den geometriska qvantitetens *grundbestämningar.*

Anm. Det plan, hvari en geometrisk qvantitet ligger, utgör ock i sjelfva verket en grundbestämning, som vi på förhand efter behof och godtfinnande ega att fastställa. Men som det här är fråga endast om punkter i ett plan i allmänhet, så gälla naturligtvis de lagar vi här komma att utveckla för hvilket plan som helst, då vi följaktligen tillsvidare (N:o 10—12) lemna planet obestämdt.

En geometrisk qvantitets riktning bestämma vi förmedelst den vinkel, som ifrågavarande riktning bildar med grundriktningen, då en geometrisk qvantitet tecknas egentligen R_{P^0}. Denna vinkel kan icke allenast vara ifrån och med 0^0 till och med 360^0, utan den kan vara millioner grader. Ty en och samma riktning kan representeras af hvilken som helst af vinklarna: P^0, $P^0 + 360^0$, $P^0 + 2.360^0$, $P^0 + 3.360^0$ och i allmänhet af $P^0 + k.360$, då k betyder något af *hela talen* 0, 1, 2, 3. 4, o. s. v. ända till ∞. En geometrisk qvantitet tecknas derföre generelt:

$$R_{P^0 + k.360^0}$$

Vi förenkla denna beteckning, om vi med stöd af Eucl. III: 26 representera vinklar med längder af motsvarande cirkelbågar med bestämd radie. Om vi derföre upprita en cirkel med 1 till radie och kalla hela omkretsens längd $2 . \pi$, så kunna vi representera hvarje vinkel och följaktligen hvarje riktning med tal, som hafva nämde radies längd som enhet. En geometrisk qvantitets riktning får då följande enklare beteckning:

$$R_{P+2k\pi}$$

Denna beteckning komma vi i det följande att använda. Det är lätt att öfvergå ifrån denna till den förra. Längden $\frac{\pi}{2}$ betecknar således 90^0, $\frac{\pi}{4}$ 45^0, $4 . \pi$ 720^0 o. s. v. Vi säga, att en geometrisk qvantitet, tecknad $R_{P,}$ har en *speciell riktning*, såsom representerad af en enda bestämd båge, och att en geometrisk qvantitet, tecknad $R_{P+2k\pi}$, har en *generell* riktning, såsom representerad af ett oändligt antal bågar.

Om vi tänka oss k representera *bestämda* hela tal, så punktera vi det: k_1, k_2, k_3, k_4 o. s. v. Det opunkterade k deremot representerar ett i allmänhet obestämdt helt tal, som kan vara lika eller olika hos särskilda qvantiteter.

Vårt mål med de geometriska qvantiteterna är att medelst dem *bestämma punkters lägen* eller, som vi för korthetens skull kalla det, *fixera punkter*. Vi säga ock, fast mindre egentligt, att geometriska qvantiteter sjelfva bestämma punkters lägen eller fixera punkter.

Då nu räta linien OC med sin riktning tecknas R_P, OD r_p, DC $r'_{p,}$, OE ϱ_φ, EF $\varrho'_{\varphi,}$ och FC $\varrho''_{\varphi,,}$, så är punkten C fullt bestämd till sitt läge genom hvilken som helst af vägarna:

$$OC = R_P, \quad ODC = r_p + r'_{p,}, \quad OEFC = \varrho_\varphi + \varrho'_{\varphi,} + \varrho''_{\varphi,,},$$

hvilket ger oss anledning sätta:

$$R_P = r_p + r'_{p,} = \varrho_\varphi + \varrho'_{\varphi,} + \varrho''_{\varphi,,} \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Tecknet + betyder icke här någon arithmetisk addition, utan en sammanläggning eller sammanfogning af brutna delar af ett afstånd, så att de tillsammantagna fixera en åstundad punkt. Vi benämna resultatet af denna sammanläggning *summa* och hvar och en af de brutna delarne *summander*.

Likheten (1) betyder: vägen R_P, brutna vägen $r_p + r'_{p,}$ och brutna vägen $\varrho_\varphi + \varrho'_{\varphi,} + \varrho''_{\varphi,,}$ äro alla tre lika såsom fixerande samma punkt C; eller geometriska qvantiteten R_P är lika med summan af geometriska qvantiteterna r_p och $r'_{p,}$ eller ϱ_φ, $\varrho'_{\varphi,}$ och $\varrho''_{\varphi,,}$ såsom fixerande en och samma punkt C.

Man akte sig att vid detta likhetsbegrepp fästa någon betydelse af likhet i qvantiteternas storlekar eller riktningar. Likheten betyder endast att en och samma punkt är fixerad af qvantiteterna på ömse sidor om likhetstecknet.

Vi skärskåda likheten (1) ur en annan synpunkt. Geometriska qvantiteterna R_P, $r'_{p,}$ och $\varrho''_{\varphi,,}$ fixera alla tre samma punkt C. Vi hafva förutsatt för hvar och en af dem lika grundriktning och enhet; men alla tre äro hänförda till olika origon: R_P till O, $r'_{p,}$ till D och $\varrho''_{\varphi,,}$ till F. Men för att någon likhet eller jemförelse mellan geometriska qvantiteter skall kunna uppställas, erfordras på grund af en lätt-insedd nödvändighet, att deras grundbestämningar skola vara lika, d. v. s. de måste vara hänförda till samma plan, origo, grundriktning och enhet. Emedan vidare vårt mål med de geometriska qvantiteterna är att bestämma punkters lägen och hvar och en af qvantiteterna R_P, $r'_{p,}$ och $\varrho''_{\varphi,,}$ är för oss i det afseendet af lika betydelse, så äro vi fullt berättigade att dem emellan uppställa likhet, så snart vi hänfört eller reducerat dem alla tre till ett och samma origo t. ex. O, då följaktligen alla deras grundbestämningar äro lika. Men R_P är förut hänförd till O; $r'_{p,}$ reducera vi till O förmedelst geometriska qvartiteten r_p genom att sätta summan $r_p + r'_{p,}$; $\varrho''_{\varphi,,}$ reducera vi först till E förmedelst geometriska qvantiteten $\varrho'_{\varphi,}$ genom att sätta summan $\varrho'_{\varphi,} + \varrho''_{\varphi,,}$, samt vidare denna summa till O förmedelst geometriska qvantiteten ϱ_φ genom att sätta summan $\varrho_\varphi + \varrho'_{\varphi,} + \varrho''_{\varphi,,}$, då nämligen äfven r_p, $\varrho'_{\varphi,}$ och ϱ_φ äro hänförda till samma plan, grundriktning och enhet som R_P, $r'_{p,}$ och $\varrho''_{\varphi,,}$. Likheten (1), sedd ur denna synpunkt, får då följande definition: *geometriska qvantiteter, som fixera samma punkt och äro hänförda till lika grundbestämningar, äro lika.*

Bestämningen af begreppet likhet, sedt ur denna synpunkt, är den *egentliga* och kommer att utgöra grundvalen för hela den följande theo-

rien. För att ytterligare häfda vår rättighet till uppställandet af detta likhetsbegrepp, tillämpa vi på likheten (1) tvenne kända axiomatiska satser:

I. Om man lägger lika till lika, så bli summorna lika; det vill här säga, *om man till qvantiteter, som fixera samma punkt och äro hänförda till lika grundbestämningar, lägger qvantiteter, som fixera samma punkt och äro hänförda till lika grundbestämningar*, (då nämligen plan, grundriktning och enhet äro lika hos de förra och sednare qvantiteterna), *så skola summorna fixera samma punkt och vara hänförda till lika grundbestämningar.* Ty om till $R_P = r'_{p,} + r_p$, fixerande punkten C från O, lägges $A_T = a_t + a'_{t,}$, fixerande $C_,$ från C, då nämligen $A_T = C C_,$, $a_t = C D_,$ och $a'_{t,} = D_, C_,$, så äro summorna lika, såsom fixerande samma punkt $C_,$ från O eller:

$$R_P + A_T = r_p + r'_{p,} + a_t + a'_{t,} \quad . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Denna sats innebär, såsom lätteligen inses, endast en reduktion af likheten $A_T = a_t + a'_{t,}$ till ett nytt origo O från dess förra origo C.

II. Om man mångfaldigar lika ett lika antal gånger, så bli de mångfaldigade lika; det vill här säga: *om man mångfaldigar geometriska qvantiteter, som fixera samma punkt och äro hänförda till lika grundbestämningar ett lika antal gånger, så skola de mångfaldigade qvantiteterna fixera samma punkt och varda hänförda till lika grundbestämningar.* Således, om vi t. ex. mångfaldiga qvantiteterna i likheten (1) m gånger d. v. s. $m . R_P$ och $m . (r_p + r'_{p,})$, så skall visas att de mångfaldiga qvantiteterna äro lika, d. v. s. $m . R_P = m . (r_p + r'_{p,})$. Ty om vi m gånger mångfaldiga hvarje sida uti triangeln $O D C$, således $m . R_P$, $m . r_p$ och $m . r'_{p,}$, så förblir triangeln tydligen sluten (Eucl. VI: 5), då således qvantiteten $m . R_P$ och summan $m . r_p + m . r'_{p,}$ fixera samma punkt och fortfara dertill att vara hänförda till lika grundbestämningar, d. v. s. $m . R_P = m . r_p + m . r'_{p,}$. Emedan vidare en mångfaldig af en summa är = summan af samma mångfaldig af delarna (Eucl. V: 1), så följer deraf:

$$m . R_P = m . (r_p + r'_{p,}) = m . r_p + m . r'_{p,} \quad . \; . \; . \quad (3)$$

(3) gäller tydligen likaväl, då m är ett brutet, som då m är ett helt tal.

Denna sats innebär i sjelfva verket ingenting annat, än att vi i stället för en enhet 1 fastställt en enhet m gånger så stor, hvilket på grund af förut fastställda bestämning af begreppet likhet är fullt berättigadt.

Med full insigt om riktigheten af vårt i (1) fastställda likhetsbegrepp gå vi nu att uttala en för våra räkningar särdeles vigtig axiomatisk sats, som omedelbart härledes från ofvan gifna definition på geometriska qvantiteters likhet.

III. *Vi kunna reducera en likhet till hvilka nya lika grundbestämningar som helst, utan att den någonsin upphör att vara likhet.*

Satserna I och II utgöra som vi se blott enskilda fall af denna.

2.

Geometriska qvantiteters summation.

Med geometriska qvantiteters summation förstå vi de arithmetiska räkningar, hvarigenom vi kunna uttrycka en tecknad summa af geometriska qvantiteter i en enda storlek och en enda riktning, eller för att anföra det enklaste fall, bestämma geometriska qvantiteten R_p, då vi ha r_p och $r'_{p'}$ gifna i likheten:

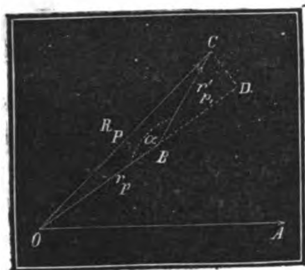
$$R_p = r_p + r'_{p'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Möjligheten att bestämma fullt tillförlitliga räknelagar för summationen ligger deri, att geometriska qvantiteter, som ingå i en likhet, bilda slutna månghörningar, hvilkas sidor och vinklar äro bestämda af de geometriska qvantiteternas storlekar och riktningar. De satser, som uti Euclids geometri äro bevisade om månghörningar, kunna derföre tillämpas på våra geometriska qvantiteter, då följaktligen de arithmetiska räkningar, som dessa satser anvisa, kunna öfverflyttas hit. För vårt närvarande behof tillämpa vi blott några satser på likheten (1).

Uti Euclids geometri betyder tecknet + arithmetiska räkningen "lägga till" (addition) och tecknet — arithmetiska räkningen "taga ifrån" (subtraktion), hvarföre vi framgent komma att med dessa tecken

beteckna nämde arithmetiska räkningar, såsom öfverflyttade på våra geometriska qvantiteter.

Anm. Man skilje mellan tecknet + i denna betydelse och tecknet + hos de geometriska qvantiteterna. Då tydligheten så fordrar, teckna vi derföre den arithmetiska summan liksom den arithmetiska skilnaden med parenthes.



I. Låt O vara vårt origo och OA vår grundriktning. Låt $R_p = OC$, $r_p = OB$ och $r'_{p,} = BC$. Låt α mellan de gifna sidorna r och r' vara trubbig. Enligt Eucl. II: 12 få vi då:

$$R^2 = r^2 + r'^2 + 2r . BD \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Storleken R kunna vi nu beräkna genom en arithmetisk rotutdragning, så snart vi fått längden BD bestämd. Vinkeln p kunna vi deremot icke efter Euclides bestämma. Vi lemna derföre dessa bestämningar i sin allmännelighet till N:o 7, såsom beroende af lagar hos de geometriska qvantiteterna, som vi framdeles komma att utveckla, och fästa oss nu endast vid ett enskildt fall.

(2) gäller för alla möjliga trubbvinkliga trianglar och följaktligen äfven för dem, der α skiljer sig på oändligt litet från 180^0. Men då α skiljer sig på oändligt litet från 180^0, så skiljer sig BD på oändligt litet från r', då nemligen r och r' äro ändliga; och vi se att, då $\alpha = 180^0$, så är $BD = r'$, hvaraf följer med stöd af Eucl. II: 4:

$$R^2 = r^2 + r'^2 + 2r . r' = (r + r')^2$$

då således enligt I: 47 th. II:

$$R = (r + r')$$

hvilken likhet, betraktad i riktningen p, blir:

$$R_p = (r + r')_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Likheten (1) har nu blifvit, emedan alla tre riktningarna sammanfallit till en enda p:

$$R_p = r_p + r'_p$$

som, sammanställd med (3) enligt Eucl. ax. 1, ger:

$$r_p + r'_p = (r + r')_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

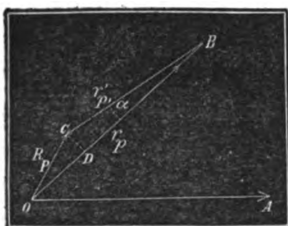
d. v. s. ***summan af tvenne geometriska qvantiteter, som ha samma riktning, är = arithmetiska summan af deras storlekar med deras gemensamma riktning.***

Samma lag gäller tydligen för huru många summander som helst.

Detta inses ock omedelbart genom konstruktion. Ty den geometriska qvantitet, som skall fixera samma punkt, som summan af tvenne andra geometriska qvantiteter med samma riktning, kan till storleken icke vara annat än arithmetiska summan af deras storlekar och till riktningen icke annat än deras gemensamma riktning.

II. Låt α mellan r och r' vara spetsig, då enligt Eucl. II: 13:

$$R^2 = r^2 + r'^2 - 2r \,.\, BD \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$



Här gäller samma räsonnemang som i I. Tänka vi oss derföre en spetsvinklig triangel, der α skiljer sig på oändligt litet från 0^0, så skiljer sig BD på oändligt litet från r', då r och r' äro ändliga; och då $\alpha = o^0$, så är $BD = r'$, hvaraf följer med stöd af Eucl. II: 7:

$$R^2 = r^2 + r'^2 - 2r \,.\, r' = (r - r')^2$$

då vi antaga $r > r'$, då således:

$$R = (r - r')$$

som, betraktad i riktningen p, blir:

$$R_p = (r - r')_p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Likheten (1) är nu, emedan $P = p$ och $p_, = p + \pi$:

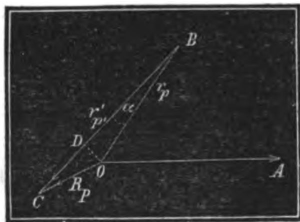
$$R_p = r_p + r'_{p+\pi}$$

som, sammanställd med (6), ger:

$$R_p + r'_{p+\pi} = (r - r')_p \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (7).$$

Är deremot $r' > r$, så få vi i stället för (5):

$$R^2 = r^2 + r'^2 - 2r' \,.\, BD \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$



der för $\alpha = o^0$ BD är $= r$ och således:

$$R = (r' - r)$$

som, betraktad i riktningen $p + \pi$, blir:

$$R_{p+\pi} = (r' - r)_{p+\pi} \quad . \; . \; . \quad (9).$$

Likheten (1) är nu, emedan $P = p + \pi$ och $p' = p + \pi$:

$$R_{p+\pi} = r_p + r'_{p+\pi}$$

som, sammanställd med (9), ger:

$$r_p + r'_{p+\pi} = (r' - r)_{p+\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Likheterna (7) och (10) betyda: *summan af tvenne geometriska qvantiteter, som skilja sig i riktning på 180°, eller som ha motsatta riktningar, är = arithmetiska skilnaden mellan deras storlekar med den större riktning.*

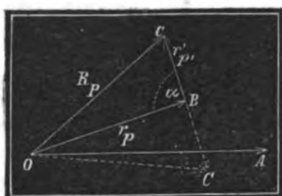
Riktigheten af denna sats inses äfven omedelbart genom konstruktion. En geometrisk qvantitet kan nämligen icke tänkas fixera samma punkt, som summan af tvenne andra geometriska qvantiteter med motsatta riktningar, utan att den till storleken måste vara lika med arithmetiska skilnaden mellan deras storlekar och till riktningen lika med den större summandens riktning.

Medelst dessa 2:ne lagar, uttryckta i (4), (7) och (10), erhålla vi vigtiga jemförelsepunkter mellan våra geometriska qvantiteter och algebrans positiva och negativa qvantiteter. Vi veta af algebran, att en algebraisk negativ qvantitet kan betraktas såsom resultatet af en subtraktion, der subtrahenden är större än minuenden, hvilket resultat der tecknas med — (minus) framföre; (10) antyder just en sådan subtraktion, der likväl resultatet är tecknadt med riktningen π. Således utmärker π hos en geometrisk qvantitet på grund af (7) och (10) jemte hvad — tecknet utmärker hos en algebraisk dertill äfven riktningen 180°. Vi komma derföre i det följande att på grund af denna motsvarighet kalla riktningen $p + \pi$ negativ i förhållande till riktningen p, betraktad som positiv, samt storlekar i denna riktning för negativa i förhållande till storlekar i riktningen p, betraktade som positiva.

Vi anmärkte i början af detta N:o, att vi egde att skilja mellan tecknet + såsom ett uttryck för arithmetisk addition och tecknet + såsom uttryck för geometrisk summation. Af (4), (7) och (10) se vi nu, att det geometriska summationstecknet + omfattar såsom enskilda fall betydelsen af både + och — såsom uttryck för arithmetiska eller algebraiska räkningar.

III. Låt vinkeln mellan sidorna r och r' vara rät, då enligt Eucl. I: 47:

$$R^2 = r^2 + r'^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$



hvaraf följer, då vi tillsvidare med $(r^2+r'^2)^{\frac{1}{2}}$ beteckna den arithmetiska qvadratroten ur $r^2 + r'^2$:

$$R = (r + r'^2)^{\frac{1}{2}}$$

som, betraktad i riktningen P, blir:

$$R_P = (r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}}_P \quad . \; . \; . \quad (12).$$

Likheten (1) blir nu:

$$R_P = r_p + r'_{p+k\pi+\frac{\pi}{2}}$$

som sammanställd med (12), ger:

$$r_p + r'_{p+k\pi+\frac{\pi}{2}} = (r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}}_P \quad . \; . \; . \; . \quad (13).$$

Riktningen P kunna vi icke nu bestämma (se I). Men vi se att den måste vara beroende af summandernas r_p och $r'_{p,}$ storlekar och riktningar.

Likheten (13) betyder: *summan af tvenne geometriska qvantiteter, hvilka skilja sig i riktning på 90⁰ eller 270⁰, är till storleken = arithmetiska qvadratroten ur arithmetiska summan af qvadraterna på r och r′ samt till riktningen beroende af ifrågavarande qvantiteters storlekar och riktningar.*

Vi se att i detta fall kunna icke geometriska qvantiteter direkt hvarken "läggas till" eller "tagas ifrån" hvarandra. Vi skola längre fram se, att denna summation motsvarar den algebraiska additionen af en reel och en imaginär qvantitet.

Är $p = o$, så gälla (4), (7), (10) och (13) naturligtvis för den positiva grundriktningen; är $p = \pi$, så gälla de för den negativa.

Vi uttala till slut följande trenne för de geometriska qvantiteterna högst vigtiga satser:

1. $r_p = r'_{p,}$, d. v. s. fixerande samma punkt, kan icke ega rum, utan att särskildt:

$$r = r' \text{ och } p = p, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

2. $r_p = r'_{p+k\pi+\frac{\pi}{2}} = o$, d. v. s. fixerande origo, kan med stöd af (13) icke ega rum, utan att särskildt:

$$r = o \text{ och } r' = o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

3. $r_{k\pi} + r'_{k\pi+\frac{\pi}{2}} = \varrho_{k\pi} + \varrho'_{k\pi+\frac{\pi}{2}}$, der k representerar

obekanta hela tal, kan med stöd af Eucl. 1: 26 icke ega rum, utan att särskildt:

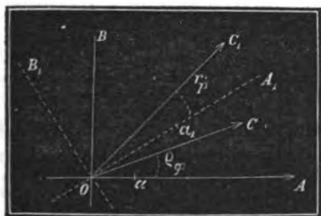
$$r_{k\pi} = \varrho_{k\pi} \text{ och } r'_{k\pi} = \varrho'_{k\pi} \quad \ldots\ldots \quad (16).$$

Att k måste representera tal som äro lika, särskildt hos r och ϱ och särskildt hos r' och ϱ', eller skilja sig på ett jemt tal inses omedelbart genom konstruktion.

3.

Geometriska qvantiteters reduktion till en ny enhet och ny grundriktning.

I N:o 1 ha vi kallat origo, enhet och grundriktning för en geometrisk qvantitets grundbestämningar, derföre att vi måste på förhand fastställa dessa, för att den geometriska qvantiteten skall kunna vara fullt verklig till sin betydelse. Emedan desse trenne bestämningars fastställelse beror på vårt eget godtfinnande och på beskaffenheten af våra räkningar, så kunna de för särskilda qvantiteter vara olika. Det är tydligt, att qvantiteter, som ha olika grundbestämningar, måste först bringas till likhet i afseende på dem, innan de kunna bli möjliga af någon inbördes jemförelse. Vi förutsätta nu enhet och grundriktning olika. Vi skola framdeles i N:o 5 afhandla det fall, då jemte dessa, äfven origo är olika. Låt oss derföre ha tvenne axelsystemer BoA och $B_{,}oA_{,}$ med samma origo o, olika enhet oa och $oa_{,}$ samt olika grundriktning oA och $oA_{,}$. Låt oss vidare ha tvenne geometriska qvantiteter ϱ_{φ} och r_{p}, fixerande C och $C_{,}$ samt hänförda till hvar sitt system. Enligt N:o 1 representeras då C af $oa.\varrho_{\varphi}$ och $C_{,}$ af $oa_{,}.r_{p}$. För att dessa qvantiteter skola kunna på något sätt jemföras med hvarandra, så fordras att förhållandet mellan deras enheter och grundriktningar skall vara bestämdt. Sätta vi derföre $oa = 1$ och riktningen $oA = 0$ d. v. s. såsom grundriktning för begge qvan-

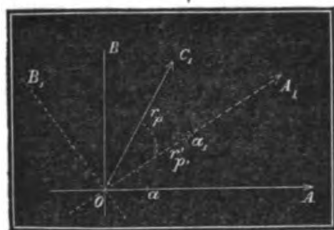


titeterna, så kan enheten $o\,a_{,}$ med sin riktning $o\,A_{,}$ i förhållande till enheten $o\,a$ med sin riktning $o\,A$ representeras af en geometrisk qvantitet $r'_{p_{,}}$. Punkten $C_{,}$, hänförd till enheten $o\,a$ och grundriktningen $o\,A$, representeras följaktligen af *produkten* $o\,a_{,} . r_p = r'_{p_{,}} . r_p$. Vi säga nu att *vi reducerat en geometrisk qvantitet* r_p *till en ny enhet* $o\,a$ *och en ny grundriktning* $o\,A$. Den förra enheten $o\,a_{,}$ med sin riktning $o\,A_{,}$ eller $r'_{p_{,}}$ utgör således den qvantitet, förmedelst hvilken en sådan reduktion låter verkställa sig och hvilken vi derföre understundom benämna *reduktionsqvantitet till ny enhet och grundriktning*. Uttrycket $r'_{p_{,}} . r_p$ visar för öfrigt den kända formen för den arithmetiska och algebraiska *multiplikationen*, hvilket räknesätt således kommer att ingå i läran om våra geometriska qvantiteter, med ofvan angifna begreppsutvidgning. Qvantiteterna $r'_{p_{,}}$ och r_p benämnas ur denna synpunkt *faktorer* och uttrycket $r'_{p_{,}} . r_p$ *produkt*.

Sedan vi sålunda visat uppkomsten och betydelsen af en multiplikation med geometriska qvantiteter, ha vi att uppvisa de arithmetiska räkningar, förmedelst hvilka vi ega att utföra en sådan multiplikation. Dessa innehållas i följande sats:

Produkten af tvenne geometriska qvantiteter $r'_{p_{,}}$ *och* r_p *är till storleken = arithmetiska produkten af storlekarna* r' *och* r *samt till riktningen = arithmetiska summan af riktningarna* $p_{,}$ *och* p, *d. v. s.* $r'_{p_{,}} . r_p = (r' . r)_{p_{,} + p}$ *eller enklare* $= r' . r_{p_{,} + p}$.

Vi låta punkten $C_{,}$, hänförd till enheten $o\,a_{,}$ och riktningen $o\,A_{,}$ representeras af r_p, då enligt ofvan $C_{,}$, hänförd till enheten $o\,a$ och riktningen $o\,A$, representeras af produkten $r'_{p_{,}} . r_p$, då nemligen $r'_{p_{,}}$ representerar enheten $o\,a_{,}$ med dess riktning $o\,A_{,}$ i förhållande till enheten $o\,a$ med dess riktning $o\,A$. Produkten $r'_{p_{,}} . r_p$ uttrycker således först att enheten $r'_{p_{,}}$ skall tagas r gånger, hvilket just utgör arithmetiska produkten af r' och r i riktningen $p_{,}$, räknadt från $o\,A$, d. v. s. $(r' . r)_{p_{,}}$; sedan skall detta resultat förläggas i riktningen p,



räknadt från $o A_{,}$, hvaraf vi erhålla $(r' . r)_{p_{,} + p}$ eller helt enkelt tecknadt $r' . r_{p_{,} + p}$, då således:

$$r'_{p_{,}} . r_{p} = r' . r_{p_{,} + p} \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Anm. 1:o är $p = o$ och $p_{,} = \pi$, så blir

$$r_{o} . r'_{\pi} = r . r'_{\pi}$$

eller är $p = \pi$ och $p_{,} = o$, så blir

$$r_{\pi} . r'_{o} = r . r'_{\pi};$$

2:o är $p = p_{,} = \pi$, så blir

$$r_{\pi} . r'_{\pi} = r . r'_{2\pi}.$$

Inom algebran är:

$$a . (-b) = - a . b$$
$$(-a) . b = - a . b$$
$$(\ \ a) . (-b) = + a . b,$$

hvilket ytterligare ådagalägger π:s öfverensstämmelse till betydelsen med — tecknet i algebran.

Följdsatser:

I. Emedan

$$r'_{p_{,}} . r_{p} = r' . r_{p_{,}+p},$$

så är

$$r''_{p_{,,}} . r'_{p_{,}} . r_{p} = r''_{p_{,,}} . r' . r_{p_{,}+p} = r'' . r' . r_{p_{,,} + p_{,} + p}$$

o. s. v. huru många faktorer det än må vara.

II. Emedan enligt arithmetiken faktorernas ordning i en produkt, likasom summandernas ordning i en summa, är likgiltig, så följer deraf, att det är likgiltigt, i hvilken ordning faktorerna här förekomma, ty

$$r'_{p_{,}} . r_{p} = (r' . r)_{p_{,} + p}$$

och

$$r_{p} . r'_{p_{,}} = (r . r')_{p_{,} + p},$$

då således

$$r'_{p_{\prime}} \cdot r_{p_1} = r_p \cdot r'_{p_{\prime}}.$$

Detta gäller tydligen för huru många faktorer som helst.

III. Om vi nu ha m stycken lika faktorer, så teckna vi produkten $(r_p)^m$; r_p säges nu vara upphöjd till m:te digniteten. Talet m, utmärkande de ingående faktorernas antal, kallas *exponent*. De arithmetiska räkningar vi ega att använda för en sådan dignitets upphöjning uttryckas medelst:

$$(r_p)^m = r_p \cdot r_p \cdot r_p \ldots . m \text{ stycken} = r^m_{mp} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

d. v. s. *storleken r upphöjes till m:te digniteten och riktningen p multipliceras med m.* Detta sednare kallas att *nedmultiplicera exponenten i riktningen.*

Anm. Om $p = \pi$, så följer deraf:

$$(r_\pi)^m = r^m_{m.\pi},$$

då produkten är positiv eller negativ alltefter som m är jemt eller udda tal. Inom algebran är likaså:

$$(-a)^m = + a^m,$$

om m är jemt, hvaremot

$$(-a)^m = - a^m,$$

då m är udda tal.

IV. Om jag har en geometrisk qvantitet r_p, så kan jag tänka mig honom såsom produkten af två faktorer, t. ex. $\varrho'_{\varphi_{\prime}}$ och ϱ_φ, således

$$r_p = \varrho'_{\varphi_{\prime}} \cdot \varrho_\varphi.$$

Känner jag denna produkt samt den ena af faktorerna t. ex. ϱ_φ, så kan jag alltid beräkna den andra. Ty

$$r_p = \varrho'_{\varphi_{\prime}} \cdot \varrho_\varphi = \varrho' \cdot \varrho_{\varphi_{\prime} + \varphi}$$

d. v. s. enligt N:o 2 (14)

$$r = \varrho' \cdot \varrho \text{ och } p = \varphi_{\prime} + \varphi$$

hvaraf följer:

$$\varrho'_{\varphi'} = \left(\frac{r}{\varrho}\right)_{p-\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

d. v. s. *den faktor* $\varrho'_{\varphi'}$, *som jemte en gifven faktor* ϱ_φ *har till produkt en gifven quantitet* r_p, *är till storleken = arithmetiska qvoten* $\frac{r}{\varrho}$ *samt till riktningen = arithmetiska skilnaden* $p - \varphi$.

Denna räknelag, såsom motsatt multiplikation, kallas ***division***, då följaktligen r_p benämnes *dividend*, ϱ_φ *divisor* och $\varrho'_{\varphi'}$ *qvot*.

För enkelhetens skull kunna vi teckna:

$$\left(\frac{r}{\varrho}\right)_{p-\varphi} = \frac{r_p}{\varrho_\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

då vi med en riktning i nämnaren alltid förstå en subtraktiv riktning i täljaren.

Anm. 1. Skulle den subtraktiva riktningen φ vara större än p, så kunna vi öka p med $2k\pi$, då subtraktionen låter verkställa sig, eller ock kunna vi subtrahera p från φ och afsätta resten i motsatt led från grundriktningen, hvaraf uppkommer med — tecknade eller *negativa* vinklar eller bågar. Det är likgiltigt, hvilketdera sättet jag använder, ty i begge fallen erhålles samma resultat.

Anm. 2. Sedan uppkomsten och betydelsen af negativa vinklar eller bågar blifvit i Anm. 1 ådagalagd, så är det tydligt, att vi icke vidare behöfva inskränka k i $2k\pi$ att endast uttrycka ett helt positivt tal, utan det kan uttrycka hvilket helt positivt eller negativt tal som helst.

Anm. 3. Är

$$p = \pi \text{ samt } \varphi = o,$$

så följer deraf

$$\frac{r_\pi}{\varrho_0} = \left(\frac{r}{\varrho}\right)_\pi;$$

är vidare

$$p = o \text{ samt } \varphi = \pi,$$

så följer deraf

$$\frac{r_0}{\varrho_\pi} = \left(\frac{r}{\varrho}\right)_{-\pi};$$

är slutligen

$$p = \varphi = \pi,$$

så följer deraf

$$\frac{r_\pi}{\rho_\pi} = \left(\frac{r}{\rho}\right)_o.$$

Inom algebran återfinna vi dessa trenne fall under följande former:

$$\frac{-a}{b} = -\left(\frac{a}{b}\right);$$

$$\frac{a}{-b} = -\left(\frac{a}{b}\right);$$

$$\frac{-a}{-b} = +\left(\frac{a}{b}\right).$$

V. Om jag har en dignitet $\left(r_p\right)^m$ och jag tänker mig den ena efter den andra af de multiplikationer, som den innefattar, upphäfna, så kunna vi representera detta medelst följande teckningar:

$$\frac{\left(r_p\right)^m}{r_p} = \left(r_p\right)^{m-1}$$

$$\frac{\left(r_p\right)^m}{\left(r_p\right)^2} = \left(r_p\right)^{m-2}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{\left(r_p\right)^m}{\left(r_p\right)^m} = \left(r_p\right)^{m-m} = \left(r_p\right)^0.$$

Detta ger anledning till trenne slutsatser: 1:o *kan en dignitet i nämnaren tecknas som en dignitet i täljaren, men med negativ exponent;*

$$\frac{1}{\left(r_p\right)^m} = \left(r_p\right)^{-m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

2:o *kunna vi representera 1 med hvilken qvantitet som helst med o till exponent:*

$$\left(r_p\right)^0 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

3:o *kunna vi på negativa exponenter tillämpa lagen, uttryckt i (2);* ty enligt (4) är:

$$\frac{1}{(r_p)^m} = \left(\frac{1}{r^m}\right)_{-mp}$$

hvaraf följer, då vi enligt algebran teckna storleken $\left(\frac{1}{r^m}\right) = r^{-m}$:

$$\frac{1}{(r_p)^m} = (r_p)^{-m} = r^{-m}_{-mp} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

VI. Tänkes en geometrisk qvantitet r_p såsom m·te digniteten af en geometrisk qvantitet ϱ_φ, d. v. s.

$$r_p = (\varrho_\varphi)^m,$$

så kan ϱ_φ uttryckas i r_p sålunda:

$$\varrho_\varphi = (r_p)^{\frac{1}{m}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

då jag med $(r_p)^{\frac{1}{m}}$ *förstår en sådan qvantitet, som, upphöjd till m·te digniteten, återger mig* r_p, *d. v. s.*

$$(r_p)^{\frac{1}{m}\cdot m} = (r_p)^1 = r_p.$$

De arithmetiska räkningar, hvarigenom vi kunna bestämma ϱ_φ ur r_p kallas *rotutdragning*, och ϱ_φ säges vara *m·te rot till* r_p.

Vi gå att uppvisa dessa räkningar:

$$(\varrho_\varphi)^m = \varrho^m_{m\varphi} = r_p,$$

hvaraf följer:

$$\varrho^m = r, \qquad m\varphi = p,$$

hvaraf vidare följer:

$$\varrho = r^{\frac{1}{m}}, \qquad \varphi = \frac{p}{m},$$

då således:

$$\varrho_\varphi = (r_p)^{\frac{1}{m}} = r^{\frac{1}{m}}_{\frac{p}{m}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

d. v. s. *m·te roten ur en geometrisk qvantitet* r_p *är till storleken = m·te roten ur storleken r samt till riktningen m·te delen af riktningen p.*

Om vi betrakta riktningen p i dess generalité, d. v. s. ökad med $2k\pi$, så följer deraf:

$$\varrho_\varphi = \left(r_{p+2k\pi}\right)^{\frac{1}{m}} = r^{\frac{1}{m}}_{\frac{p+2k\pi}{m}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Vi se att ϱ_φ har olika riktningar för $k = o$, $k = 1$, $k = 2$ o. s. v. ända till $k = m - 1$, hvaraf vi sluta, *att en geometrisk qvantitet r_p har generelt m stycken m:te rötter, men specielt för $k = o$ blott en enda*, hvilken kallas *principalrot.*

Anm. Inom algebran ha vi qvadratroten ur en positiv qvantitet a $= \pm \sqrt{a}$; detta motsvaras här af:

$$\left(r_{2k\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}}_{k\pi},$$

der vi för $k = o$ få:

$$r^{\frac{1}{2}}_{o}$$

och för $k = 1$:

$$r^{\frac{1}{2}}_{\pi}\,.$$

Vidare ha vi inom algebran qvadratroten ur en negativ qvantitet $-a$ $= \pm \sqrt{-a} = \pm \sqrt{a}\,.\,\sqrt{-1}$, hvilket här motsvaras af:

$$\left(r_{\pi+2k\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}}_{\frac{\pi(1+2k)}{2}},$$

som för $k = o$ blir:

$$r^{\frac{1}{2}}_{\frac{\pi}{2}}$$

samt för $k = 1$:

$$r^{\frac{1}{2}}_{\frac{3\pi}{2}}.$$

Algebrans imaginära qvantiteter motsvaras således af geometriska qvantiteter i den positiva och negativa vinkelräta riktningen.

VII. Vi ha enligt (9):

$$\left(r_p\right)^{\frac{1}{m}} = r^{\frac{1}{m}}_{\frac{p}{m}}$$

och om vi tänka oss dessa qvantiteter upphöjda till n:te digniteten, så följer deraf:

$$\left(r_p\right)^{\frac{n}{m}} = \left(r^{\frac{1}{m}}_{\frac{p}{m}}\right)^n = r^{\frac{n}{m}}_{\frac{np}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

hvaraf vi se, *att samma lag gäller för* ***brutna*** *exponenter, som får hela positiva och negativa.*

Betrakta vi i (11) riktningen p såsom generell, så få vi:

$$\left(r_{p+2k\pi}\right)^{\frac{n}{m}} = r^{\frac{n}{m}}_{\frac{n}{m}.(p+2k\pi)} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

I detta fall få vi tydligen äfven m olika värden på riktningen; hvilket visar, att *en geometrisk qvantitet med bruten exponent lemnar generelt lika många värden på riktningen, som nämnaren i exponenten innehåller enheter.*

Anm. I (12) och öfverallt, der vi använda bråk-exponenter, anse vi bråket bragt till sin enklaste form, d. v. s. täljare och nämnare få icke innehålla någon gemensam faktor.

Föregående formler äro tydligen sanna, äfven om m och n äro endera negativa, i följd hvaraf vi kunna representera alla i det föregående rörande exponenter utvecklade lagar medelst teckningen:

$$\left(r_{p+2k\pi}\right)^{\mu} = r^{\mu}_{\mu(p+2k\pi)} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

der vi med μ representera ett positivt eller negativt helt eller brutet tal.

VIII. Om vi med μ $\mu_,$ $\mu_{,,}$ o. s. v. representera positiva eller negativa hela eller brutna tal, så låter med användande af föregående lagar bevisa sig att:

$$\left(r_p\right)^{\mu} \cdot \left(r_p\right)^{\mu_,} \cdot \left(r_p\right)^{\mu_{,,}} \ldots = \left(r_p\right)^{\mu+\mu_,+\mu_{,,}\ldots} \quad \ldots \quad (14)$$

samt att:

$$\left[\left\{\left(r_p\right)^{\mu}\right\}^{\mu_,}\right]^{\mu_{,,}\cdots} = \left(r_p\right)^{\mu.\mu_,.\mu_{,,}\ldots} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

IX. Vi gå nu att undersöka uttryck af formen:

$$\left\{r_p \cdot r'_{p_,}\right\}^{\mu},$$

der μ har ofvannämnda betydelse.

1:o $\mu = m$, ett helt positivt tal, hvaraf följer med stöd af II:

$$\left(r_p \cdot r'_{p,}\right)^m = \left(r_p \cdot r'_{p,}\right)\left(r_p \cdot r'_{p,}\right) \ldots m \text{ stycken} = \left(r_p\right)^m \cdot \left(r'_{p,}\right)^m \ldots (16)$$

2:o $\mu = m$, ett helt negativt tal, hvaraf följer enligt V:

$$\left(r_p \cdot r'_{p,}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(r_p \cdot r'_{p,}\right)^m} = \frac{1}{\left(r_p\right)^m \cdot \left(r'_{p,}\right)^m}$$

$$= \left(r_p\right)^{-m} \cdot \left(r'_{p,}\right)^{-m} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

3:o $\mu = \frac{1}{m}$, då m är ett helt positivt eller negativt tal, hvaraf följer, om vi kalla:

$$\left(r_p\right)^{\frac{1}{m}} = \varrho_\varphi, \qquad \left(r'_{p,}\right)^{\frac{1}{m}} = \varrho'_{\varphi,},$$

då således:

$$r_p = \left(\varrho'_{\varphi,}\right)^m, \qquad r'_{p,} = \left(\varrho'_{\varphi,}\right)^m;$$

$$\left(r_p \cdot r_{p,}\right)^{\frac{1}{m}} = \left\{\left(\varrho_\varphi\right)^m \cdot \left(\varrho_{\varphi,}\right)^m\right\}^{\frac{1}{m}} = \left(\varrho_\varphi \cdot \varrho_{\varphi,}\right)^{m \cdot \frac{1}{m}}$$

$$= \varrho_\varphi \cdot \varrho'_{\varphi,} = \left(r_p\right)^{\frac{1}{m}} \cdot \left(r'_{p,}\right)^{\frac{1}{m}} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

4:o $\mu = \frac{n}{m}$, m och n hela tal, endera eller begge på samma gång positiva eller negativa:

$$\left(r_p \cdot r'_{p,}\right)^{\frac{n}{m}} = \left\{\left(r_p\right)^{\frac{1}{m}} \cdot \left(r'_{p,}\right)^{\frac{1}{m}}\right\}^n = \left(r_p\right)^{\frac{n}{m}} \cdot \left(r'_{p,}\right)^{\frac{n}{m}} \ldots (19).$$

Dessa fyra fall kunna vi nu sammanfatta till ett och representera medelst formeln:

$$\left(r_p \cdot r'_{p,}\right)^\mu = \left(r_p\right)^\mu \cdot \left(r'_{p,}\right)^\mu \quad \ldots\ldots \quad (20).$$

Det är tydligt att detta gäller för huru många faktorer som helst.

X. Emedan de räknelagar, som innehållas i följdsatserna III—VII utgöra omedelbara härledningar af lagen för enhets- och grundriktnings-reduktionen och följaktligen sjelfva icke kunna vara annat än särskilda slags enhets- och grundriktnings-reduktioner, så ega vi full rätt med stöd af N:o 1 ax. III, att på en geometrisk likhet verkställa hvilka räkningar som helst, som innehållas i dessa satser. Således kunna vi, i öfverensstämmelse med lagen för algebraiska eqva-

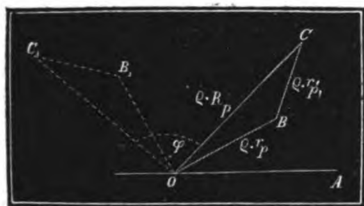
tioner, på ömse sidor om likhetstecknet multiplicera och dividera med lika geometriska qvantiteter, upphöja till lika dignitet med positiv eller negativ exponent, utdraga lika rot och i allmänhet att upphöja till lika potens vare sig med hel eller bruten, positiv eller negativ exponent.

4.

Vi gå nu att bevisa en annan vigtig sats, hvarpå de geometriska qvantiteternas polynomräkningar grunda sig. Den lyder:

Produkten af en geometrisk qvantitet och tvenne geometriska qvantiteters summa är = summan af produkterna af nämnde qvantitet med hvar och en af summanderna, d. v. s.

$$\varrho_{\varphi} \cdot \{r_p + r'_{p,}\} = \varrho_{\varphi} \cdot r_p + \varrho_{\varphi} \cdot r'_{p,}$$



Sätt:

$$r_p + r'_{p,} = R_P,$$

hvaraf följer enligt N:o 3, X:

$$\varrho_{\varphi} \cdot \{r_p + r'_{p,}\} = \varrho_{\varphi} \cdot R_P$$

$$= \varrho \cdot R_{P+\varphi} \quad . \; . \; . \; (1).$$

Men enligt N:o 1 (3) är:

$$\varrho \cdot R_P = \varrho \cdot r_p + \varrho \cdot r'_{p,} .$$

Låt OC representera $\varrho \cdot R_P$, OB $\varrho \cdot r_p$ samt BC $\varrho \cdot r'_{p,}$. Vrid triangeln OBC en vinkel φ, hvaraf följer, att $OC_, = \varrho \cdot R_{P+\varphi}$ och $OB_, = \varrho \cdot r_{p+\varphi}$. Det är lätt se, det äfven $B_, C_,$ är $= \varrho \cdot r'_{p,+\varphi}$, om vi genom O draga tvenne med BC och $B_, C_,$ parallela linier. Alltså är:

$$\varrho \cdot R_{P+\varphi} = \varrho \cdot r_{p+\varphi} + \varrho \cdot r'_{p,+\varphi} = \varrho_{\varphi} \cdot r_p + \varrho_{\varphi} \cdot r'_{p,}$$

som, jemförd med (1), ger:

$$\varrho_{\varphi} \cdot \{r_p + r'_{p,}\} = \varrho_{\varphi} \cdot r_p + \varrho_{\varphi} \cdot r'_{p,} \quad . \; . \; . \; . \; (2).$$

Följdsatser:

I. Om

$$\varrho_\varphi = a_\alpha + b_\beta,$$

så följer deraf:

$$(a_\alpha + b_\beta)(r_p + r'_{p_\prime}) = (a_\alpha + b_\beta)\, r_p + (a_\alpha + b_\beta)\, r'_{p_\prime}$$
$$= a_\alpha \cdot r_p + b_\beta \cdot r_p + a_\alpha \cdot r'_{p_\prime} + b_\beta \cdot r'_{p_\prime} \quad . \; . \; . \quad (3).$$

Lagen är lätt att tillämpa på huru många qvantiteter som helst.

Är

$$a_\alpha = r_p \text{ och } b_\beta = r'_{p_\prime},$$

så blir (3):

$$(r_p + r'_{p_\prime})^2 = (r_p)^2 + 2\, r_p \cdot r'_{p_\prime} + (r'_{p_\prime})^2 \quad . \; . \; . \quad (4).$$

II. Det är sjelfklart, att Newtons Binomial-theorem i hela dess utsträckning gäller för våra geometriska qvantiteter likaväl, som för de algebraiska, då således:

$$(r_p + r'_{p_\prime})^m = (r_p)^m + \frac{m}{1}(r_p)^{m-1}(r'_{p_\prime})$$
$$+ \frac{m.(m-1)}{1\,.\,2}(r_p)^{m-1}(r'_{p_\prime})^2 + \text{o. s. v.}$$

vare sig m är positivt eller negativt, helt eller brutet tal.

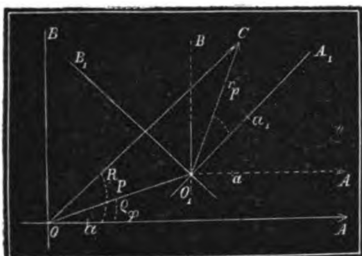
III. Det är vidare sjelfklart, att de polynomräkningar, som förekomma inom algebran och grunda sig på multiplikationen, äfven gälla för de geometriska qvantiteterna. Vi förbigå dem såsom nog vidlyftiga att här anföra.

5.

Geometriska qvantiteters reduktion till nytt origo på samma gång som till ny enhet och ny grundriktning.

Om jag har en punkt C i planet, hänförd till ett axelsystem $B, o, A,$, d. v. s. till ett origo o, och en grundriktning $o, A,$ samt till en enhet $o, a,$, så kunna vi representera dess läge med en geometrisk qvantitet r_p. Vilja vi ha samma punkt C hänförd till ett nytt axel-

system $B\,o,A$ och en ny enhet o,a, så veta vi af N:o 3, att om enheten o,a, med dess riktning o,A, i förhållande till enheten o,a med dess riktning o,A är $= r'_{p,}$, så representeras punkten C i förhållande till dessa tvenne nya grundbestämningar af produkten $r'_{p,} \,.\, r_p$. Om vidare i förhållande till axelsystemet $B\,o\,A$, parallelt med det nya axelsystemet $B\,o,A$, samt i förhållande till enheten $o\,a = o,a = 1$, origo $o,$ representeras af ϱ_φ och punkten C af R_p, hvarigenom således R_p och r_p äro hänförda till lika grundbestämningar, så erhålla vi på grund af den i N:o 1 framställda bestämningen af begreppet likhet:



$$R_p = \varrho_\varphi + r'_{p,} \,.\, r_p \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

hvilket uttryck således representerar *en reduktion till nytt origo på samma gång som till ny enhet och ny grundriktning.*

Anm. ϱ_φ utgör här den qvantitet, förmedelst hvilken r_p reduceras till nytt origo, liksom enligt N:o 3 $r'_{p,}$ utgör den qvantitet, förmedelst hvilken r_p reduceras till ny enhet och ny grundriktning, och kan derföre lämpligen kallas *reduktions-qvantitet till nytt origo.* Denna reduktions-qvantitet, hvilken här framstår i form af *summand*, måste tydligen vara hänförd till samma enhet och grundriktning, som den eller de öfriga summanderna i summan.

Följdsatser:

I. Vi kunna vidare underkasta R_p en reduktion till nya grundbestämningar på samma sätt som r_p i (1), hvaraf följer, då vi för symetriens skull punktera R_p och ϱ_φ och låta $R''_{p,,}$ $\varrho''_{\varphi,,}$ $r''_{p,,}$ beteckna mot R_p ϱ_φ och $r'_{p,}$ i (1) svarande qvantiteter:

$$R''_{p,,} = \varrho''_{\varphi,,} + r''_{p,,} \,.\, R'_{p,} = \varrho''_{\varphi,,} + r''_{p,,} \,.\, \left\{\varrho'_{\varphi,} + r'_{p,} \,.\, r_p\right\}$$

$$= \varrho''_{\varphi,,} + r''_{p,,} \,.\, \varrho'_{\varphi,} + r''_{p,,} \,.\, r'_{p,} \,.\, r_p$$

Verkställa vi dylika reduktioner upprepade gånger, så få vi såsom resultatet af den n:te i ordningen:

$$R^{(n)}_{P_{(n)}} = \varrho^{(n)}_{\varphi(n)} + r^{(n)}_{p(n)} \cdot \varrho^{(n-1)}_{\varphi(n-1)} + r^{(n)}_{p(n)} \cdot r^{(n-1)}_{p(n-1)} \cdot \varrho^{(n-2)}_{\varphi(n-2)} + \dots .$$

$$+ r^{(n)}_{p(n)} \cdot r^{(n-1)}_{p(n-1)} \dots r'''_{p'''} \cdot r''_{p''} \cdot \varrho'_{p'} + r^{(n)}_{p(n)} \cdot r^{(n-1)}_{p(n-1)} \dots r''_{p''} \cdot r'_{p'} \cdot r_p \quad \dots (2)$$

II. Af (2) följer omedelbart, om vi sätta:

$$r^{(n)}_{p(n)} = r^{(n-1)}_{p(n-1)} = \dots = r''_{p''} = r'_{p'} = r_p,$$

$$R^{(n)}_{P_{(n)}} = \varrho^{(n)}_{\varphi(n)} + r_p \cdot \varrho^{(n-1)}_{\varphi(n-1)} + \left(r_p\right)^2 \cdot \varrho^{(n-2)}_{\varphi(n-2)} + \dots .$$

$$+ \left(r_p\right)^{n-1} \cdot \varrho_{\varphi'} + \left(r_p\right)^{n+1} \quad \dots \dots \quad (3)$$

(3) visar den kända formen af en $(n + 1)$:ta grads eqvation, der termen näst den sista blifvit bortskaffad. Emedan det alltid är möjligt, att bortskaffa ifrågavarande term ur en eqvation, så ha vi i (3) den geometriska betydelsen gifven på en $(n + 1)$:ta grads eqvation, bestående af geometriska qvantiteter. En sådan eqvation uttrycker således n stycken reduktioner till nya grundbestämningar (enhet, grundriktning och origo), der alla reduktions-qvantiteterna $r'_{p'}$, $r''_{p''}$ o. s. v. äro lika sinsemellan och lika med geometriska qvantiteten r_p. I enlighet med konstruktionssättet af ofvanstående figur kunna vi derföre uppvisa den geometriska betydelsen af hvarje i en sådan eqvation ingående qvantitet.

III. Är i (2)

$$r^{(n)} = r^{(n-1)} = \dots = r'' = r' = 1,$$

så följer deraf:

$$R^{(n)}_{P(n)} = \varrho^{(n)}_{\varphi(n)} + 1_{p(n)} \cdot \varrho^{(n-1)}_{\varphi(n-1)} + 1_{p(n)+p(n-1)} \cdot \varrho^{(n-2)}_{\varphi(n-2)}$$

$$+ 1_{p(n)+p(n-1)+p(n-2)} \cdot \varrho^{(n-3)}_{\varphi(n-3)} + \dots + 1_{p(n)+p(n-1)+\dots+p'''+p''} \cdot \varrho'_{\varphi'}$$

$$+ 1_{p(n)+p(n-1)+\dots+p''+p'} \cdot r_p \quad \dots \dots \quad (4)$$

(4) representerar således resultatet af n stycken reduktioner till nya grundriktningar och nya origon (koordinat-transformationer). Är $n = 1$, så blir (4), om vi underlåta att punktera R_P och ϱ_φ:

$$R_P = \varrho_\varphi + 1_{p'} \cdot r_p \cdot \quad \dots \dots \quad (5)$$

(5) representerar hvad vi i plana analytiska geometrien förstå med *en transformation af rätvinkliga koordinater.*

IV. På grund af N:o 1 ax. III samt med stöd af N:o 3 X kunna vi nu på en geometrisk likhet verkställa hvilka reduktioner som helst till ny enhet, ny grundriktning och nytt origo. Om vi tillika erinra oss från N:o 2 att en summa i allmänhet $r_p + r_{p+\pi} = o$, så kunna vi förvandla likheten (1) i:

$$\frac{R_P + \varrho_{\varphi+\pi}}{r'_{p,}} = r_p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

hvilket innebär en öfvergång från R_P:s till r_p:s grundbestämningar. Vi kunna tydligen på samma sätt i (2), (3) och (4) göra en öfvergång från $R^{(n)}_{P_{(n)}}$:s till r_p:s grundbestämningar.

Slutligen få vi anmärka tvenne för våra reduktioner särdeles vigtiga satser, hvilka äro sjelfklara på grund af de begrepp vi i det föregående utvecklat:

1. *Sättet huru vi räkna våra positiva riktningar och positiva bågar kan, såsom beroende af fastställelsen af våra grundbestämningar, vara hvilket som helst, blott det är ett och detsamma under hela loppet af en företagen räkning.*

2. *Vid våra reduktioner till lika grundbestämningar räkna vi våra riktningar och bågar från de nya grundbestämningarna till de gamla och icke tvertom.*

6.

Alla de räknelagar vi i det föregående framställt, motsvara de inom algebran s. k. *algebraiska lagarna.* De räknelagar åter, som vi i det följande N:o 6 och N:o 8 komma att framställa, hvilka angå *riktningar* och *exponenter*, motsvara mathematikens *transcendenta lagar.* Räknelagarna för *riktningar* kallas: *trigonometriska* och *cyklometriska*, de för *exponenter: exponentiella* och *logarithmiska.*

A.

De trigonometriska lagarna.

De trigonometriska räknelagarna ha till mål, att ur riktningar såsom gifna och bekanta bestämma storlekar, som af dem äro beroende. Dessa lagar hvila, ytterst på följande på grund af N:o 3 fullt klara sats:

$$1_o \cdot r_p = r_o \cdot 1_p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

d. v. s. *vi kunna betrakta en geometrisk qvantitets riktning såsom tillhörande hans enhet*, då vi följaktligen kunna studera geometriska qvantiteters riktningar oberoende af deras föränderliga storlekar. Vi gripa oss derföre an med att studera uttryck af formen 1_p.

Om vi sätta 1_p = summan af tvenne geometriska qvantiteter, hvaraf den ena ligger i den positiva eller negativa grundriktningen och den andra i den positiva eller negativa vinkelräta riktningen, så erhålla vi:

$$1_p = \varrho_{k\pi} + \varrho'_{k\pi + \frac{\pi}{2}}.$$

Vi kalla $\varrho_{k\pi}$ *Cosinus för p*, tecknad:

$$\text{Cos } p$$

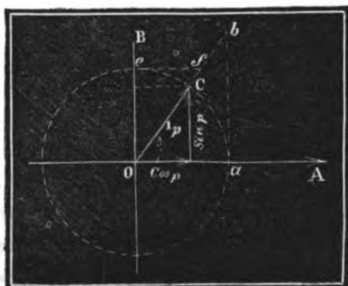
samt $\varrho'_{k\pi}$ *Sinus för p*, tecknad:

$$\text{Sin } p,$$

då således:

$$1_p = \text{Cos } p + \text{Sin } p_{\frac{\pi}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Med stöd af N:o 2 (12) erhålla vi:



$$1_0 = (\text{Cos}^2 p + \text{Sin}^2 p)^{\frac{1}{2}}_0,$$

hvaraf följer:

$$1 = \text{Cos}^2 p + \text{Sin}^2 p \quad . \; . \; . \quad (3).$$

Af (3) följer omedelbart:

$$\left.\begin{aligned} \text{Cos } p &= (1 - \text{Sin}^2 p)^{\frac{1}{2}}_{k\pi} \\ \text{Sin } p &= (1 - \text{Cos}^2 p)^{\frac{1}{2}}_{k\pi} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (4)$$

Vanligen tecknas (4):

$$\text{Cos } p = \pm \sqrt{1 - \text{Sin}^2 p}$$

$$\text{Sin } p = \pm \sqrt{1 - \text{Cos}^2 p}$$

För hvarje punkt af cirkel-periferien se vi att följande förhållande eger rum:

$$\left.\begin{aligned}\text{Cos}\,(-p) &= \text{Cos}\,p\\ \text{Sin}\,(-p) &= -\,\text{Sin}\,p\end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (5).$$

Med stöd af (5), af lagen uttryckt i N:o 4 samt af riktningen π:s öfverensstämmelse till betydelsen med tecknet — härleda vi med lätthet följande satser:

$$1_{\frac{\pi}{2}} \cdot 1_{\pm p} = 1_{\frac{\pi}{2}} \cdot (\text{Cos}\,p \pm \text{Sin}\,p_{\frac{\pi}{2}}) = \text{Cos}\,p_{\frac{\pi}{2}} \mp \text{Sin}\,p;$$

vidare

$$1_{\frac{\pi}{2}} \cdot 1_{\pm p} = 1_{\frac{\pi}{2} \pm p} = \text{Cos}\left(\tfrac{\pi}{2} \pm p\right) + \text{Sin}\left(\tfrac{\pi}{2} \pm p\right)_{\frac{\pi}{2}},$$

som genom jemförelse gifva enligt N:o 2 (16):

$$\left.\begin{aligned}\text{Cos}\left(\tfrac{\pi}{2} \pm p\right) &= \mp\,\text{Sin}\,p\\ \text{Sin}\left(\tfrac{\pi}{2} \pm p\right) &= \text{Cos}\,p\end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (6).$$

På samma sätt finna vi:

$$1_{\pi} \cdot 1_{\pm p} = 1_{\pi}\,(\text{Cos}\,p \pm \text{Sin}\,p_{\frac{\pi}{2}}) = -\,\text{Cos}\,p \mp \text{Sin}\,p_{\frac{\pi}{2}}$$

vidare

$$1_{\pi} \cdot 1_{\pm p} = 1_{\pi \pm p} = \text{Cos}\,(\pi \pm p) + \text{Sin}\,(\pi \pm p)_{\frac{\pi}{2}},$$

hvaraf följer:

$$\left.\begin{aligned}\text{Cos}\,(\pi \pm p) &= -\,\text{Cos}\,p\\ \text{Sin}\,(\pi \pm p) &= \mp\,\text{Sin}\,p\end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (7).$$

Slutligen finna vi på samma sätt:

$$1_{\frac{3\pi}{2}} \cdot 1_{\pm p} = 1_{\frac{3\pi}{2}} \cdot (\text{Cos}\,p \pm \text{Sin}\,p_{\frac{\pi}{2}}) = -\,\text{Cos}\,p_{\frac{\pi}{2}} \pm \text{Sin}\,p$$

vidare

$$1_{\frac{3\pi}{2}} \cdot 1_{\pm p} = 1_{\frac{3\pi}{2} \pm p} = \text{Cos}\left(\tfrac{3\pi}{2} \pm p\right) + \text{Sin}\left(\tfrac{3\pi}{2} \pm p\right)_{\frac{\pi}{2}},$$

hvaraf följer:

$$\left.\begin{aligned}\text{Cos}\left(\tfrac{3\pi}{2} \pm p\right) &= \pm\,\text{Sin}\,p\\ \text{Sin}\left(\tfrac{3\pi}{2} \pm p\right) &= -\,\text{Cos}\,p\end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (8).$$

Man har kallat $\frac{\text{Sin } p}{\text{Cos } p}$ *tangenten för p*, tecknad tang p eller tg p, samt $\frac{\text{Cos } p}{\text{Sin } p}$ *Cotangenten för p*, tecknad Cotang p eller Cotg p; och kunna tg p och Cotg p med stöd af Eucl. VI: 4 till sina storlekar representeras af längderna $a\,b$ och $e\,f$. Af formlerna (6), (7) och (8) erhålla vi då:

$$\left.\begin{aligned} \text{tg}\left(\tfrac{\pi}{2} \pm p\right) &= \mp \text{ Cotg } p \\ \text{Cotg}\left(\tfrac{\pi}{2} \pm p\right) &= \mp \text{ tg } p \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{tg}\,(\pi \pm p) &= \pm \text{ tg } p \\ \text{Cotg}\,(\pi \pm p) &= \pm \text{ Cotg } p \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{tg}\left(\tfrac{3\pi}{2} \pm p\right) &= \mp \text{ Cotg } p \\ \text{Cotg}\left(\tfrac{3\pi}{2} \pm p\right) &= \mp \text{ tg } p \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11).$$

Cos och Sin, tg och Cotg kallas *trigonometriska linier*. Någon ytterligare framställning af relationer mellan dessa linier samt betydelsen af *Secant* och *Cosecant* förbigå vi såsom liggande utom målet för denna afhandling.

Med stöd af dessa förutskickade formler öfvergå vi till framställningen af de vigtigaste satser inom trigonometrien.

I. Vi hafva enligt (1) och (2) samt N:o 1 (3):

$$r_p = r\,.\,1_p = r\,(\text{Cos } p + \text{Sin } p_{\frac{\pi}{2}}) = r \text{ Cos } p + \text{Sin } p_{\frac{\pi}{2}} \quad \ldots \quad (12).$$

Anm. Jemför följande bekanta uttryck:

$$r\,e^{p\sqrt{-1}} = r\,(\text{Cos } p + \sqrt{-1} \text{ Sin } p).$$

Vidare kunna vi sätta:

$$r_p = a_{k\pi} + b_{k\pi + \frac{\pi}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (13).$$

Om vi sammanställa (12) och (13), så erhålla vi med stöd af N:o 2 (16):

$$\left.\begin{aligned} a_{k\pi} &= r \text{ Cos } p \\ b_{k\pi} &= r \text{ Sin } p \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

$a_{k\pi}$ eller r Cos p kallas r_p:s *projektion på grundriktningen* och $b_{k\pi}$ eller r Sin p kallas r_p:s *projektion på den vinkelräta riktningen*.

Med begagnande af (12) erhålla vi vidare:

$$r_p + r'_{p,} = r \operatorname{Cos} p + r \operatorname{Sin} p_{\frac{\pi}{2}} + r' \operatorname{Cos} p, + r' \operatorname{Sin} p_{,\frac{\pi}{2}}$$

$$= r \operatorname{Cos} p + r' \operatorname{Cos} p, + (r \operatorname{Sin} p + r' \operatorname{Sin} p,)_{\frac{\pi}{2}} \quad \ldots (15).$$

I (15) säga vi *att vi projicierat summan* $r_p + r'_{p,}$ *på ett rätvinkligt axelsystem.* Vi kunna tydligen enligt (15) projiciera en summa bestående af huru många summander som helst.

Ha vi likheten:

$$r_p + r'_{p,} = \varrho_\varphi + \varrho'_{\varphi,},$$

så erhålla vi enligt (15) genom projiciering:

$$r \operatorname{Cos} p + r' \operatorname{Cos} p, + (r \operatorname{Sin} p + r' \operatorname{Sin} p,)_{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \varrho \operatorname{Cos} \varphi + \varrho' \operatorname{Cos} \varphi, + (\varrho \operatorname{Sin} \varphi + \varrho' \operatorname{Sin} \varphi,)_{\frac{\pi}{2}}$$

hvilken likhet enligt N:o 2 (16) sönderfaller i:

$$\left.\begin{aligned} r \operatorname{Cos} p + r' \operatorname{Cos} p, &= \varrho \operatorname{Cos} \varphi + \varrho' \operatorname{Cos} \varphi, \\ r \operatorname{Sin} p + r' \operatorname{Sin} p, &= \varrho \operatorname{Sin} \varphi + \varrho' \operatorname{Sin} \varphi, \end{aligned}\right\} \quad \ldots (16)$$

d. v. s. *geometriska qvantiteter, som fixera samma punkt, ha projektionerna på ett rätvinkligt axelsystem lika.* Detta gäller tydligen för huru många qvantiteter som helst.

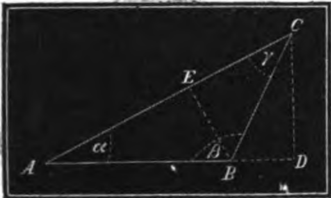
Ha vi slutligen likheten:

$$r_p + r'_{p,} + r''_{p,,} + \ldots = o$$

så erhålla vi, om vi projiciera, med stöd af N:o 2 (15):

$$\left.\begin{aligned} r \operatorname{Cos} p + r' \operatorname{Cos} p, + r'' \operatorname{Cos} p_{,,} + \ldots &= o \\ r \operatorname{Sin} p + r' \operatorname{Sin} p, + r'' \operatorname{Sin} p_{,,} + \ldots &= o \end{aligned}\right\} \quad \ldots (17)$$

d. v. s. *geometriska qvantiteter, som fixera origo sjelft, ha projektionerna på de rätvinkliga axlarna* $= o$.



II. Låt ABC vara en triangel, hvars vinklar äro α, β, γ; låt DC vara vinkelrät mot den utdragna AB samt BE vinkelrät mot AC. Med stöd af (14) och (7) finna vi då:

$$AC \operatorname{Sin} \alpha = BC \operatorname{Sin} (\pi - \beta)$$

$$= BC \operatorname{Sin} \beta = DC$$

hvaraf följer:

$$\frac{AC}{\mathrm{Sin}\,\beta} = \frac{BC}{\mathrm{Sin}\,\alpha}.$$

Vidare är:

$$AB\,\mathrm{Sin}\,\alpha = BC\,\mathrm{Sin}\,\gamma = BE,$$

hvaraf följer:

$$\frac{AB}{\mathrm{Sin}\,\gamma} = \frac{BC}{\mathrm{Sin}\,\alpha},$$

då således:

$$\frac{AB}{\mathrm{Sin}\,\gamma} = \frac{AC}{\mathrm{Sin}\,\beta} = \frac{BC}{\mathrm{Sin}\,\alpha} \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (18)$$

d. v. s. *uti en triangel är hvarje sida i lika proportion till sinus för dess motstående vinkel.*

III. Vi veta af föregående samt N:o 4 att:

$$1_p \cdot 1_{p_,} = (\mathrm{Cos}\,p + \mathrm{Sin}\,p_{\frac{\pi}{2}}) \cdot (\mathrm{Cos}\,p_, + \mathrm{Sin}\,p_{,\frac{\pi}{2}})$$

$$= \mathrm{Cos}\,p\;\mathrm{Cos}\,p_, + (\mathrm{Cos}\,p\;\mathrm{Sin}\,p_, + \mathrm{Sin}\,p\;\mathrm{Cos}\,p_,)_{\frac{\pi}{2}} + \mathrm{Sin}\,p\;\mathrm{Sin}\,p_{,\pi};$$

vidare är enligt N:o 3:

$$1_p \cdot 1_{p_,} = 1_{p+p_,} = \mathrm{Cos}\,(p + p_,) + \mathrm{Sin}\,(p + p_,)_{\frac{\pi}{2}}.$$

Om vi jemföra dessa två likheter, så erhålla vi med stöd af N:o 2 (16):

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Cos}\,(p + p_,) &= \mathrm{Cos}\,p\;\mathrm{Cos}\,p_, - \mathrm{Sin}\,p\;\mathrm{Sin}\,p_, \\ \mathrm{Sin}\,(p + p_,) &= \mathrm{Cos}\,p\;\mathrm{Sin}\,p_, + \mathrm{Sin}\,p\;\mathrm{Cos}\,p_, \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \quad (19).$$

På samma sätt få vi med iakttagande af (5):

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Cos}\,(p - p_,) &= \mathrm{Cos}\,p\;\mathrm{Cos}\,p_, + \mathrm{Sin}\,p\;\mathrm{Sin}\,p_, \\ \mathrm{Sin}\,(p - p_,) &= \mathrm{Sin}\,p\;\mathrm{Cos}\,p_, - \mathrm{Cos}\,p\;\mathrm{Sin}\,p_, \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \quad (20).$$

Af (19) och (20) ha vi således lärt oss *uttrycka Cos och Sin för summan af eller skilnaden mellan tvenne bågar i Cos och Sin för bågarna sjelfva.*

Vi kunna tydligen enligt (19) uttrycka Cos och Sin för summan af hvilket antal bågar som helst i Cos och Sin för bågarna sjelfva.

Vi se med lätthet att:

$$(1_p)^m = (\mathrm{Cos}\,p + \mathrm{Sin}\,p_{\frac{\pi}{2}})^m = 1_{mp} = \mathrm{Cos}\,mp + \mathrm{Sin}\,mp_{\frac{\pi}{2}}.$$

Enligt binomial-theoremet är:

$$(\operatorname{Cos} p + \operatorname{Sin} p_{\frac{\pi}{2}})^m = \operatorname{Cos}^m p + \frac{m}{1} \operatorname{Cos}^{m-1} p \,.\, \operatorname{Sin} p_{\frac{\pi}{2}}$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} \operatorname{Cos}^{m-2} p \,.\, (\operatorname{Sin} p_{\frac{\pi}{2}})^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} \operatorname{Cos}^{-3} p \,.\, (\operatorname{Sin} p_{\frac{\pi}{2}})^3 + \ldots\ldots$$

Vi erinra oss att

$$(\operatorname{Sin} p_{\frac{\pi}{2}})^2 = - \operatorname{Sin}^2 p, \quad (\operatorname{Sin} p_{\frac{\pi}{2}})^3 = - \operatorname{Sin}^3 p_{\frac{\pi}{2}} \quad \text{o. s. v.},$$

hvaraf följer enligt N:o 2 (16):

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Cos} mp = \operatorname{Cos}^m p - \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} \operatorname{Cos}^{m-2} p \,.\, \operatorname{Sin}^2 p + \ldots\ldots \\ \operatorname{Sin} mp = \frac{m}{1} \operatorname{Cos}^{m-1} p \operatorname{Sin} p - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} \operatorname{Cos}^{m-3} p \,.\, \operatorname{Sin}^3 p + \ldots \end{array}\right\} (21).$$

Är m ett helt positivt tal, så äro serierna i (21) ändliga, hvaraf vi se, att multipla bågar kunna exakt uttryckas i digniteter af bågarna sjelfva. Dessa formler äro kända under namn af *Moivres theorem.*

B.

De cyklometriska lagarna.

Om jag utgår från någon af de trigonometriska linierna såsom gifven till sin storlek i den positiva eller negativa riktningen, så låta de deremot svarande värdena på p beräkna sig. Dock se vi af formlerna (5), (7) och (10), att mot hvarje trigonometrisk linea svara 2:ne bågar, då det derföre erfordras något mer än en enda trigonometrisk linea, för att ha den åsyftade bågen fullt bestämd. Vi förbigå det generella fall, då vi tänka oss hvarje båge ökad med $2k\pi$. I detta fall svara naturligtvis mot hvarje trigonometrisk linea ett oändligt antal bågar.

Om vi med $\varrho_{k\pi}$ representera en storlek i den positiva eller negativa grundriktningen, der $1 > \varrho > o$, och om vi sätta:

$$\text{Cos}\, p = \varrho_{k\pi},$$

så svara mot hvarje värde på $\varrho_{k\pi}$, såsom nyss nämdes, en båge p och en båge $-p$, hvilket vi representera medelst följande teckning:

$$\pm\, p = \text{arc Cos}\, \varrho_{k\pi} \text{ (bågen, hvars Cos är } = \varrho_{k\pi}) \ldots (22).$$

Likaledes finna vi, om vi ha

$$\text{Sin}\, p = \varrho'_{k\pi},$$

$$\left.\begin{matrix} p \\ \pi - p \end{matrix}\right\} = \text{arc Sin}\, \varrho'_{k\pi} \text{ (bågen, hvars Sin är } = \varrho'_{k\pi}) \ldots (23),$$

Om vi sätta

$$\text{tg}\, p = a_{k\pi}$$

samt

$$\text{Cotg}\, p = a'_{k\pi},$$

der $\infty > \begin{Bmatrix} a \\ a' \end{Bmatrix} > o$, så erhålla vi enligt (10):

$$\left.\begin{matrix} p \\ \pi + p \end{matrix}\right\} = \text{arctg}\, a_{k\pi} \text{ (bågen, hvars tg är } = a_{k\pi}) \ldots (24)$$

$$\left.\begin{matrix} p \\ \pi + p \end{matrix}\right\} = \text{arccotg}\, a'_{k\pi} \text{ (bågen, hvars Cotg är } = a'_{k\pi}) \ldots (25).$$

Uppvisandet af sättet, att numeriskt beräkna en trigonometrisk linea ur en gifven båge samt att beräkna en båge ur en gifven trigonometrisk linea, ligger utom målet för denna afhandling. Vår uppgift i N:o 6 har varit, att få trigonometrien uppvisad såsom en omedelbar följd af de lagar, som vi i föregående N:is utvecklat rörande de geometriska qvantiteterna.

7.

Lagen för geometriska qvantiteters summation fullständigad.

Med stöd af de lagar vi hittills utvecklat kunna vi nu fullständigt utföra den i N:o 2 antydda summationen.

Om vi enligt N:o 6 (13) sätta:

$$r_p = a_{k\pi} + b_{k\pi + \frac{\pi}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

samt utgå från projektionerna $a_{k\pi}$ och $b_{k\pi}$ såsom gifna och bestämda, så kunna vi beräkna r_p både till storlek och riktning. Enligt N:o 2 III är:

$$r = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$$

samt enligt N:o 6 (14):

$$\frac{b_{k\pi}}{a_{k\pi}} = \frac{r \operatorname{Sin} p}{r \operatorname{Cos} p} = \operatorname{tg} p ,$$

hvaraf följer:

$$\left.\begin{matrix} p \\ \pi + p \end{matrix}\right\} = \operatorname{arctg} \frac{b_{k\pi}}{a_{k\pi}}.$$

Hvilkendera bågen, som är den räta, bestämmes af tecknen för a och b eller, som är detsamma, af k:s betydelse särskildt hos a och särskildt hos b (se nedan).

Vi erhålla således:

$$r_p = a_{k\pi} + b_{k\pi + \frac{\pi}{2}} = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}{}_{\operatorname{arctg} \frac{b_{k\pi}}{a_{k\pi}}} \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Med stöd af (1) och (2) kunna vi nu summera 2:ne eller flera geometriska qvantiteter, om vi enligt N;o 6 (15) taga deras projektioner. Vi summera här blott 2:ne;

$$r_p + r'_{p,} = r \operatorname{Cos} p + r' \operatorname{Cos} p, + (r \operatorname{Sin} p + r' \operatorname{Sin} p,)_{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left\{(r \operatorname{Cos} p + r' \operatorname{Cos} p,)^2 + (r \operatorname{Sin} p + r' \operatorname{Sin} p,)^2\right\}^{\frac{1}{2}}_{\operatorname{arctg} \frac{r \operatorname{Sin} p + r' \operatorname{Sin} p,}{r \operatorname{Cos} p + r' \operatorname{Cos} p,}}$$

Om vi utföra de inom { } tecknade räkningar, så få vi med stöd af N:o 6 (3) och (20):

$$r_p + r'_{p,} = \left\{r^2 + 2r\, r' \operatorname{Cos}(p, - p) + r'^2\right\}^{\frac{1}{2}}_{\operatorname{arctg} \frac{r \operatorname{Sin} p + r' \operatorname{Sin} p'}{r \operatorname{Cos} p + r' \operatorname{Cos} p'}} \cdots (3)$$

Vi kunna finna en i allmänhet beqvämare formel för riktningen med användande af N:o 6 (18) och (20). Vi sätta:

$$r_p + r'_{p,} = R_P$$

samt

$$P = \alpha + p,$$

hvaraf följer:

$$\frac{r'}{\operatorname{Sin} \alpha} = \frac{r}{\operatorname{Sin}\{(p,-p)-\alpha\}} = \frac{r}{\operatorname{Sin}(p,-p)\operatorname{Cos}\alpha - \operatorname{Cos}(p,-p)\operatorname{Sin}\alpha},$$

hvaraf följer:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Sin}(p,-p)}{\frac{r}{r,} + \operatorname{Cos}(p,-p)},$$

hvaraf vidare följer:

$$r_p + r'_{p,} = \left\{r^2 + 2r\, r' \operatorname{Cos}(p,-p) + r'^2\right\}^{\frac{1}{2}}_{\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Sin}(p,-p)}{\frac{r}{r,} + \operatorname{Cos}(p,-p)} + p} \ldots (4).$$

Denna formel kunna vi med stöd af N:o 4 omedelbart härleda ur (3):

$$r_p + r'_{p,} = 1_p \cdot \left(r_o + r'_{p,-p}\right)$$

$$= \left(r^2 + 2r\, r' \operatorname{Cos}(p,-p) + r'^2\right)^{\frac{1}{2}}_{\operatorname{arctg} \frac{r, \operatorname{Sin}(p,-p)}{r + r' \operatorname{Cos}(p,-p)} + p} \ldots (5)$$

Arctg $\frac{r \operatorname{Sin} p + r' \operatorname{Sin} p,}{r \operatorname{Cos} p + r' \operatorname{Cos} p,}$ i (3) är fullt bestämd genom tecknen för täljaren och nämnaren i bråket $\frac{r \operatorname{Sin} p + r' \operatorname{Sin} p,}{r \operatorname{Cos} p + r' \operatorname{Cos} p,}$: äro nämligen täljare och nämnare båda på samma gång positiva, så ligger bågen mellan gränsvärdena o och $\frac{\pi}{2}$ eller i 1:ta qvadranten; är täljaren positiv och nämnaren negativ, så ligger bågen mellan gränsvärdena $\frac{\pi}{2}$ och π eller i 2:dra qvadranten; äro både täljare och nämnare på samma gång negativa, så ligger bågen mellan gränsvärdena π och $\frac{3\pi}{2}$ eller i 3:dje qvadranten; är slutligen täljaren negativ och nämnaren positiv, så ligger bågen mellan gränsvärdena $\frac{3\pi}{2}$ och 2π eller i 4:de qvadran-

ten. Samma bestämningar gälla för arctg i (4) och (5). Det är lätt att genom konstruktion öfvertyga sig om riktigheten af det nu anförda.

Följdsats:

Om vi i (4) sätta:

$$r = r' = 1,$$

så följer deraf:

$$1_p + 1_{p_,} = (2 + 2 \operatorname{Cos} (p_, - p))^{\frac{1}{2}}_{\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Sin} (p_, - p)}{1 + \operatorname{Cos} (p_, - p)} + p} \quad \ldots \quad (6).$$

Enligt N:o 6 (21) är:

$$\operatorname{Sin} (p_, - p) = \operatorname{Sin} 2 \left(\frac{p_, - p}{2}\right) = 2 \operatorname{Sin} \left(\frac{p_, - p}{2}\right) . \operatorname{Cos} \left(\frac{p_, - p}{2}\right),$$

$$\operatorname{Cos} (p_, - p) = \operatorname{Cos} 2 \left(\frac{p_, - p}{2}\right) = \operatorname{Cos}^2 \left(\frac{p_, - p}{2}\right) - \operatorname{Sin}^2 \left(\frac{p_, - p}{2}\right),$$

då således med stöd af N:o 6 (3):

$$1 + \operatorname{Cos} (p_, - p) = 2 \operatorname{Cos}^2 \left(\frac{p_, - p}{2}\right),$$

hvilka värden, insatta i (5), gifva:

$$1_p + 1_{p_,} = 2 \operatorname{Cos} \left(\frac{p_, - p}{2}\right) . 1_{\frac{p_, + p}{2}} \quad \ldots \quad (7).$$

Vidare finna vi, om vi projiciera (7):

$$\operatorname{Cos} p + \operatorname{Cos} p_, + (\operatorname{Sin} p + \operatorname{Sin} p_,)_{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2 \operatorname{Cos} (p_, - p) \left\{ \operatorname{Cos} \left(\frac{p_, + p}{2}\right) + \operatorname{Sin} \left(\frac{p_, + p}{2}\right)_{\frac{\pi}{2}} \right\},$$

hvaraf följer enligt N:o 2 (16):

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Cos} p + \operatorname{Cos} p_, = 2 \operatorname{Cos} \left(\frac{p_, - p}{2}\right) . \operatorname{Cos} \left(\frac{p_, + p}{2}\right) \\ \operatorname{Sin} p + \operatorname{Sin} p_, = 2 \operatorname{Cos} \left(\frac{p_, - p}{2}\right) . \operatorname{Sin} \left(\frac{p_, + p}{2}\right) \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (8),$$

hvarigenom vi lärt oss *uttrycka arithmetiska summan af 2:ne Cos eller 2:ne Sin i faktorer af desamma.*

Såsom en följd af (7) erhålla vi, om vi erinra oss N:o 6 (7) och (6):

$$1_p - 1_{p_\prime} = 1_p + 1_{p_\prime + \pi},$$

hvaraf följer:

$$\left.\begin{aligned} \text{Cos}\, p - \text{Cos}\, p_\prime &= 2\, \text{Sin}\, \frac{(p_\prime - p)}{2} \,.\, \text{Sin}\, \frac{(p_\prime + p)}{2} \\ \text{Sin}\, p - \text{Sin}\, p_\prime &= -2\, \text{Sin}\, \frac{(p_\prime - p)}{2} \,.\, \text{Cos}\, \frac{(p_\prime + p)}{2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (9).$$

8.

Exponentiella och logarithmiska lagar.

Vi förbigå all närmare redogörelse för dessa lagar, så vidt de endast röra geometriska qvantiteters storlekar. I detta fall är nämligen hvarje algebraisk framställning af dem fullt tillämplig här. Vi fästa oss i stället vid ett bekant exponent uttryck, hvars härledning blir medelst våra geometriska qvantiteter högst vig och naturlig.

Enligt N:o 3 (6) representerar $(r_p)^0$ enheten 1, hvad r_p såsom ändlig än må vara. Ha vi derföre ett uttryck $(r_p)^{\frac{1}{m}}$, så är tydligen

$$\lim\, (r_p)^{\frac{1}{m}} = 1$$

på samma gång som

$$\lim\, \frac{1}{m} = 0.$$

Men vi antaga, att en qvantitet icke kan fullständigt sammanfalla med sin limes, då följaktligen $(r_p)^{\frac{1}{m}}$, der m konvergerar mot ∞ och är ett positivt eller negativt tal, icke kan bli $= 1$. Om vi då tillika antaga, att $(r_p)^{\frac{1}{m}}$ skiljer sig på oändligt litet från 1, så kunna vi sätta:

$$(r_p)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{\varrho_\varphi}{m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

der således $\frac{\varrho_\varphi}{m}$ utmärker en oändligt liten del af en ändlig geometrisk qvantitet ϱ_φ.

Likheten (1) innebär föröfrigt, att m:te roten ur r_p samt m:te delen af ϱ_φ, hvars origo ligger i den positiva grundriktningen på afståndet 1, skola fixera samma punkt och vara hänförda till lika enhet och grundriktning.

Vår uppgift blir nu att under dessa förutsättningar söka bestämma förhållandet mellan geometriska qvantiteterna r_p och ϱ_φ, då m konvergerar mot ∞.

Vi sätta:

$$\varrho_\varphi = \varrho \operatorname{Cos} \varphi + \varrho \operatorname{Sin} \varphi_{\frac{\pi}{2}} = x + y_{\frac{\pi}{2}},$$

der således:

$$\left.\begin{aligned} \varrho \operatorname{Cos} \varphi &= x \\ \varrho \operatorname{Sin} \varphi &= y \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Vi erhålla då enligt N:o 7 (2):

$$(r_p)^{\frac{1}{m}} = 1 + \varrho_\varphi = (1 + \tfrac{x}{m}) + (\tfrac{y}{m})_{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left\{(1 + \tfrac{x}{m})^2 + (\tfrac{y}{m})^2\right\}^{\frac{1}{2}}_{\operatorname{arctg} \frac{\frac{y}{m}}{1+\frac{x}{m}}},$$

hvaraf följer, om vi upphöja till m:te digniteten å ömse sidor och i st. f. $(1 + \frac{\varrho_\varphi}{m})^m$ insätta dess limes:

$$r_p = \lim (1 + \frac{\varrho_\varphi}{m})^m = \lim \left\{(1 + \tfrac{x}{m})^2 + (\tfrac{y}{m})^2\right\}^{\frac{m}{2}}_{m \,.\, \operatorname{arctg} \frac{\frac{y}{m}}{1+\frac{x}{m}}} \quad \ldots (3).$$

Men

$$\lim m \,.\, \operatorname{arctg} \frac{\frac{y}{m}}{1+\frac{x}{m}} = m \,.\, \operatorname{arc} \frac{y}{m} = y,$$

hvaraf följer

$$p = y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Vidare är:

$$r = \lim \left\{(1 + \frac{x}{m})^2 + (\frac{y}{m})^2\right\}^{\frac{m}{2}} = \lim \left\{1 + \frac{1}{m}.(2x + \frac{x^2+y^2}{m})\right\}^{\frac{m}{2}}$$

samt, om vi sätta:

$$\frac{1}{m}(2x + \frac{x^2+y^2}{m}) = \frac{1}{m_1},$$

der således äfven

$$\lim \frac{1}{m_1} = o,$$

så är

$$\frac{m}{2} = m_1 (x + \frac{x^2+y^2}{2m}),$$

hvaraf följer:

$$r = \lim (1 + \frac{1}{m_1})^{m_1 (x + \frac{x^2+y^2}{2m})} = e^x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

då för $(1 + \frac{1}{m_1})^{m_1}$ sättes dess limes e samt för $(x + \frac{x^2+y^2}{2m})$ sättes dess limes x.

Genom sammanställning af (2), (3), (4) och (5) erhålla vi således:

$$r_p = \lim (1 + \frac{\varrho_\varphi}{m})^m = e^x_y = e^{\varrho \operatorname{Cos} \varphi}_{\varrho \operatorname{Sin} \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Detta är således det förhållande, som eger rum mellan 2:ne på i (1) uppgifna sätt förbundna geometriska qvantiteter. Vi skola framdeles i N:o 9 uppvisa den geometriska betydelsen af detta förhållande.

Sätta vi i (6)

$$\varrho = o,$$

så följer deraf

$$r_p = 1_o;$$

sätta vi vidare

$$\varphi = o,$$

så följer deraf

$$p = o,$$

hvilket visar, att r_p och ϱ_φ hafva samma grundriktning och att ϱ_φ:s origo ligger i den positiva grundriktningen på afståndet 1, såsom redan antyddes i likheten (1). Enhetsförhållandet mellan r_p och ϱ_φ är deremot gifvet genom likheten

$$r = e^{\varrho \operatorname{Cos} \varphi}$$

eller

$$\varrho \operatorname{Cos} \varphi = \log r.$$

Vi anföra slutligen en exponent beteckning, som är vanlig inom mathematiken, för att få den öfversatt på de geometriska qvantiteternas språk:

$$e^{y\sqrt{-1}} = \operatorname{Cos} y + \sqrt{-1} \operatorname{Sin} y$$

hvilket enligt de geometriska qvantiteternas beteckningssätt får följande utseende:

$$e^{y_{\frac{\pi}{2}}} = \operatorname{Cos} y + \operatorname{Sin} y_{\frac{\pi}{2}} = 1_y \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

då således:

$$y_{\frac{\pi}{2}} = \log (1_y) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8).$$

(6) låter teckna sig i öfverensstämmelse härmed:

$$r_p = \lim \left(1 + \frac{\varrho_\varphi}{m}\right)^m = e^{x + y_{\frac{\pi}{2}}} = e^{\varrho \operatorname{Cos} \varphi + \varrho \operatorname{Sin} \varphi_{\frac{\pi}{2}}} = e^{\varrho_\varphi} \dots (9),$$

hvaraf således följer:

$$\varrho_\varphi = \log (r_p) = \log r + \log (1_p) = \log r + p_{\frac{\pi}{2}} \quad . \; . \; . \quad (10)$$

och, om p tänkes ökad med $2k\pi$:

$$\varrho_\varphi = \log \left(r_{p + 2k\pi}\right) = \log r + (p + 2k\pi)_{\frac{\pi}{2}}.$$

Man har i detta fall sagt, att det för en qvantitet finnes generelt *ett oändligt antal* logarithmer, men specielt för $k = o$ blott *en enda*, hvilken blifvit kallad *principal logarithm.*

9.

Vi gå nu att i korthet antyda, hvilket gagn och bruk vi hafva att göra af våra geometriska qvantiteter inom den analytiska geometrien.

Om vi tänka oss en funktion af r_p : $F(r_p)$, så har den för oss betydelse blott så till vida, som den enligt föregående räkningar kan uppvisas såsom fixerande en punkt i planet, då vi följaktligen kunna sätta:

$$R_p = F(r_p) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Enligt förut framställda lagar kunna vi då bringa $F(r_p)$ till formen $\Phi(r,p).1_{\Phi_1(r,p)}$, då enligt N:o 2 (14):

$$\left.\begin{aligned} R &= \Phi\,(r,p) \\ P &= \Phi_1\,(r,p) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

eller ock, om vi taga projektionerna af R_p och r_p och kalla dessa:

$$\left.\begin{aligned} R \operatorname{Cos} P &= X \qquad & r \operatorname{Cos} p &= x \\ R \operatorname{Sin} P &= Y \qquad & r \operatorname{Sin} p &= y \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (3),$$

så kunna vi bringa $F(r_p) = F(x + y_{\frac{\pi}{2}})$ till formen: $\Psi(x,y) + \Psi_1(x,y)_{\frac{\pi}{2}}$, då enligt N:o 2 (16):

$$\left.\begin{aligned} X &= \Psi\,(x,y) \\ Y &= \Psi_1\,(x,y) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Om vi i (1) tänka oss r_p representera *successiva värden* både i afseende på storleken och riktningen, d. v. s. fixera kontinuerliga punkter i planet eller, som vi för korthetens skull kalla det, *beskrifva en plan kurva*, så måste R_p representera *motsvarande successiva värden* eller beskrifva en *motsvarig plan kurva.* De af r_p och R_p beskrifna kurvor, eller kortare uttryckt: kurvorna r_p och R_p kalla vi derföre *motsvariga kurvor.* I (2) och (4) ha vi tvenne eqvationer och fyra variabla. Det fordras derföre en *tredje* eqvation mellan de fyra variabla:

$$f = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

hvilken vi kalla *vilkors equation*, för att kunna eliminera tvenne af de variabla och såsom eliminations resultat erhålla en relation mellan de tvenne återstående:

$$f_1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Om derföre vår vilkors-eqvation uttrycker eqvationen på kurvan r_p, således:

$$f\,(r\,,p) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7),$$

så kunna vi såsom eliminations-resultat erhålla eqvationen på motsvariga kurvan R_P:

$$f_1\,(R\,,P) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

eller ock, om vi ha eqvationen på kurvan r_p gifven under formen:

$$f\,(x\,,y) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9),$$

så kunna vi få såsom eliminations-resultat eqvationen på kurvan R_P under formen:

$$f_1\,(X,\;Y) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10).$$

Vi kunna omvända förhållandet och tänka oss vilkors-eqvationen uttrycka eqvationen på kurvan R_P, då vi såsom eliminations-resultat kunna erhålla eqvationen på kurvan r_p, uttryckt i r och p eller x och y; och i allmänhet kunna vi, såsom ofvan nämdes, erhålla såsom eliminations-resultat en relation mellan tvenne hvilka som helst af de fyra variabla, hvilken då naturligen är beroende af beskaffenheten af funktionen F och vilkors-eqvationen f. Med biträde af (3) kunna vi uttrycka eliminations-resultatet i tvenne hvilka som helst af variablerna: R, P, X, Y, r, p, x, y.

Det är tydligt att kontinuiteten i dessa våra F och f måste vara af stor vigt att undersöka, innan några räkningar med dem företagas. Vi anföra i det följande några enkla exempel, der F:s och f:s kontinuitet är obegränsad och der dessa tecken representera högst enkla funktionsformer. Innan vi likväl öfvergå till exemplen, få vi erinra om satserna 1 och 2 af N:o 5 äfvensom om nödvändigheten att reducera geometriska qvantiteter till lika grundbestämningar, innan likhet mellan dem uppställes (se N:o 1 definition på likhet), hvilket allt vi böra hafva i lifligt minne vid uppställningen af hvarje problem.

1. $$R_{p} = F(r_{p}) = \varrho_{\varphi} + 1_{p_{,}} . r_{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Denna geometriska likhet representerar enligt N:o 5 en reduktion af r_p till ny grundriktning och nytt origo, då nämligen i förhållande till den nya grundriktningen och det nya origo $p_{,}$ representerar den gamla grundriktningen och ϱ_{φ} det gamla origo.

Om vi enligt (3) taga projektionerna af R_p och r_p samt sätta $1_{p_{,}} = \text{Cos}\, p_{,} + \text{Sin}\, p_{,\frac{\pi}{2}}$ och $\varrho_{\varphi} = x_{,} + y_{,\frac{\pi}{2}}$ och verkställa de tecknade räkningarna, så erhålla vi enligt (4):

$$\left.\begin{aligned} X &= x_{,} + x \text{ Cos } p_{,} - y \text{ Sin } p_{,} \\ Y &= y_{,} + y \text{ Cos } p_{,} + x \text{ Sin } p_{,} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Detta uttrycker, såsom i N:o 5 (5) nämdes, *en transformation af rätvinkliga koordinater.*

Ha vi nu vår vilkors eqvation gifven under formen $f(x, y) = o$, så kunna vi mellan denna och (12) verkställa de förut antydda eliminationerna och såsom resultat erhålla $f_{1}(X, Y) = o$, hvilket då uttrycker den motsvariga kurvan R_p. Eller ock omvändt kan vilkorseqvationen vara gifven i X och Y, då vi såsom eliminations-resultat erhålla ett uttryck i x och y, såsom representerande motsvariga kurvan r_p. Vi förbigå enskilda tillämpningar på (12), såsom rikligt förekommande i analytiska geometrien, och fästa oss i stället vid sådana exempel, som kunna belysa vår antydda method ur flera synpunkter.

Ex. 1. *Hvad är motsvariga kurvan R_p till en kurva r_p, hvars projektioner x och y äro i ett konstant förhållande?*

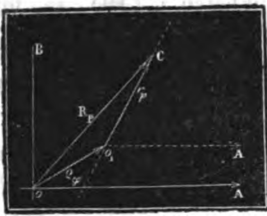
Vi förutsätta för begge kurvorna samma grundriktning, d. v. s. $p_{,} = o$, samt låta a betyda en konstant. Vårt problem representeras då af:

$$R_p = \varrho_{\varphi} + r_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

samt vilkors-eqvationen:

$$\frac{y}{x} = \frac{r \text{ Sin } p}{r \text{ Cos } p} = \text{tg}\, p = a. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Vi se af (14) att riktningen p är konstant, då följaktligen den af r_p representerade kurvan är en *rät linea.*



Vi projiciera (13), hvaraf följer:

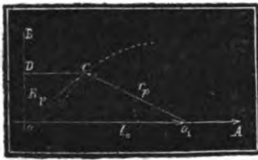
$$\left.\begin{array}{l} X = x_, + x \\ Y = y_, + y \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; (15).$$

Eliminera mellan (14) och (15) x och y, så följer deraf:

$$Y - y_, = a\,(X - x_,) \; . \; . \; . \; (16),$$

hvilket utgör den kända eqvationen på en rät linea, som går genom punkten $x_,\ y_,$.

Ex. 2. *Att bestämma läget af sådana punkter C, hvilkas närmaste afstånd från en gifven punkt O, och en gifven rät liner O B äro i ett konstant förhållande.*



Låt den gifna punkten O, ligga i grundriktningen och fixeras af $\varrho_\varphi = l_o$ samt den gifna linien $O\,B$ gå genom origo i den vinkelräta riktningen. Låt R_p och r_p från hvar sitt origo O och $O_,$ fixera C. Vi hafva då att reducera R_p och r_p till samma grundbestämningar, innan vi mellan dem kunna uppställa någon likhet. Vi antaga R_p:s grundbestämningar: origo O och grundriktningen $O\,A$ såsom våra på förhand fastställda grundbestämningar, hvartill vi således hafva att reducera r_p. Våra positiva bågar räkna vi som pilteckningen för P utvisar, då följaktligen r_p beskrifver negativa bågar. r_p börjar beskrifva sin kurva i riktningen π, då således $p_, = \pi$. Närmaste afståndet $D\,C$ (det vinkelräta) är $= X$. Problemet representeras då af:

$$R_p = l_o + 1_\pi \, . \, r_{-p} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17)$$

samt vilkors-eqvationen:

$$\frac{X}{r} = k \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18)$$

då vi med k beteckna en konstant.

Projiciera (17), så följer deraf:

$$\left.\begin{array}{l} X = l - r \operatorname{Cos} p \\ Y = r \operatorname{Sin} p \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (19).$$

Eliminera X mellan (18) och den förra likheten i (19), så följer deraf:

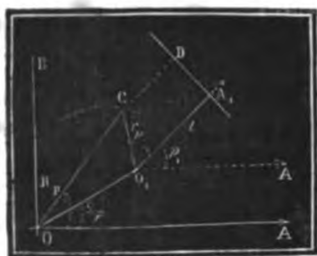
$$r = \frac{l}{k + \operatorname{Cos} p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

som, för olika värden på k ($k > 1$, $k < 1$ och $k = 1$) representerar *ellipsens*, *hyperbelns* och *parabelns* polareqvationer. Punkten $O_{,}$ kallas *focus* och linien $O\,B$ *direktrice*.

Eliminera vi r och p mellan (18) och (19), så erhålla vi ett uttryck på nämde kurvor i X och Y. Likaledes kunna vi genom lämplig eliminering uttrycka våra kurvor i x och y.

Vi kunna med lätthet afhandla detta problem om focus och direktricen fullt generelt och låta ϱ_{φ} och $p_{,}$ beteckna konstanter i allmänhet. För (17) sätta vi då:

$$R_p = \varrho_{\varphi} + 1_{p_{,}} \cdot r_p \ldots (21)$$



samt för vilkorseqvationen (18):

$$\frac{l - r \operatorname{Cos} p}{r} = k \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Punkten $O_{,}$ är här focus och linien $A_{,} D$ direktrice.

Projiciera (21), så erhålles:

$$\left.\begin{aligned} X - x_{,} &= r \operatorname{Cos} (p_{,} + p) \\ Y - y_{,} &= r \operatorname{Sin} (p_{,} + p) \end{aligned}\right\} \ldots (23),$$

då X, Y samt $x_{,}$, $y_{,}$ ha samma betydelse som i (12). Af (23) finna vi:

$$r^2 = (X - x_{,})^2 + (Y - y_{,})^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Eliminera i (23) Sin p samt mellan detta eliminations-resultat och (22) Cos p, så följer deraf:

$$l - kr = (X - x_{,}) \operatorname{Cos} p_{,} + (Y - y_{,}) \operatorname{Sin} p_{,} \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Eliminera r mellan (24) och (25), så följer deraf:

$$k^2 \left\{(X - x_{,})^2 + (Y - y_{,})^2\right\} = \left\{l - [(X - x_{,}) \operatorname{Cos} p_{,} + (Y - y_{,}) \operatorname{Sin} p_{,}]\right\}^2 \ldots (26).$$

Om vi utföra de räkningar, som äro tecknade i (26), så erhålla vi den generella formen på en 2:dra grads kurva, hvars konstanter

äro bestämda genom värdena på ϱ, φ, k, l och $p_{,}$. Och tvärtom, ega vi en 2:dra grads kurva, hvars konstanter äro bestämda:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = f(x, y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (27),$$

så kunna vi, emedan de mot hvarandra svarande konstanterna i (26) och (27) måste vara proportionella, beräkna de mot a, b, c, d, e, f svarande värdena på k, $p_{,}$, l, ϱ, φ. Af de 6 eqvationer proportioneringen ger kunna vi bestämma de 5 sistnämda värdena jemte proportionskonstanten, hvilken vi kalla m. De 6 eqvationerna äro nämligen:

$$\frac{k^2 - \operatorname{Cos}^2 p_{,}}{a} = \frac{-2 \operatorname{Sin} p_{,} \operatorname{Cos} p_{,}}{b} = \frac{k^2 - \operatorname{Sin}^2 p_{,}}{c}$$

$$= \frac{2\left\{l \operatorname{Cos} p_{,} - x_{,}(k^2 - \operatorname{Cos}^2 p_{,}) + y_{,} \operatorname{Sin} p_{,} \operatorname{Cos} p_{,}\right\}}{d} = \frac{2\left\{l \operatorname{Sin} p_{,} - y_{,}(k^2 - \operatorname{Sin}^2 p_{,}) + x_{,} \operatorname{Sin} p_{,} \operatorname{Cos} p_{,}\right\}}{e}$$

$$= \frac{x_{,}^2(k^2 - \operatorname{Cos}^2 p_{,}) + y_{,}^2(k^2 - \operatorname{Sin}^2 p_{,}) - 2x_{,}y_{,} \operatorname{Sin} p_{,} \operatorname{Cos} p_{,} - 2l\left\{x_{,} \operatorname{Cos} p_{,} + y_{,} \operatorname{Sin} p_{,}\right\} - l^2}{f} = m \ldots (28).$$

Af de 3 första eqvationerna erhålla vi:

$$\left.\begin{aligned} 2k^2 - 1 &= m\,(a + c) \\ \operatorname{Cos} 2p &= m\,(c - a) \\ \operatorname{Sin} 2p &= -mb \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29),$$

hvaraf vidare erhålles:

$$\left.\begin{aligned} m &= \pm \frac{1}{\sqrt{(c-a)^2 + b^2}} \\ \operatorname{tg} 2p_{,} &= \frac{-b}{c-a} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Af (29) och (30) erhålles följande värde på k^2:

$$k^2 = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{a + c}{\pm\sqrt{(a + c)^2 + b^2 - 4ac}} + 1\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Af (31) draga vi följande slutsatser:

för $b^2 - 4ac < 0$ är $k^2 > 1$ (ellipsen)
„ $b^2 - 4ac > 0$ „ $k^2 < 1$ (hyperbeln)
„ $b^2 - 4ac = 0$ „ $k^2 = 1$ (parabeln);

vidare, för att k skall vara reelt, fordras att $a + c$ och m äro af samma tecken för ellipsen och parabeln samt af samma eller motsatta tecken för hyperbeln.

Af (30) synes föröfrigt att m alltid är reelt. Med denna bestämning på m eller rottecknet i (30) är bågen $2p$, för ellipsen och parabeln fullt bestämd genom tecknen för Cos och Sin i (29). För hyperbeln deremot finnes 2:ne värden på $2p_{,}$, skiljande sig på 180°, allteftersom den positiva eller negativa roten användes.

Af de 2 följande eqvationerna (28) erhålles med stöd af de 3 föregående:

$$\left.\begin{aligned} 2l \operatorname{Cos} p_{,} &= m\,\{2ax_{,} + by_{,} + d\} \\ 2l \operatorname{Sin} p_{,} &= m\,\{2cy_{,} + bx_{,} + e\} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (32)$$

samt af den sista med stöd af alla de föregående:

$$f(x_{,}, y_{,}) + \frac{l^2}{m} = o \quad . \; . \quad . \; . \; . \quad (33).$$

Om vi eliminera först $y_{,}$ och sedan $x_{,}$ i (32), så följer deraf:

$$\left.\begin{aligned} x_{,} &= \frac{2l(b \operatorname{Sin} p_{,} - 2c \operatorname{Cos} p_{,})}{m(b^2 - 4ac)} + \frac{2cd - be}{b^2 - 4ac} = ln + x_0 \\ y_{,} &= \frac{2l(b \operatorname{Cos} p_{,} - 2a \operatorname{Sin} p_{,})}{m(b^2 - 4ac)} + \frac{2ae - bd}{b^2 - 4ac} = ln_{,} + y_0 \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; (34)$$

då vi sätta:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2(b \operatorname{Sin} p_{,} - 2c \operatorname{Cos} p_{,})}{m(b^2 - 4ac)} &= n \\ \frac{2(b \operatorname{Cos} p_{,} - 2a \operatorname{Sin} p_{,})}{m(b^2 - 4ac)} &= n_{,} \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

samt

$$\left.\begin{aligned} \frac{2cd - be}{b^2 - 4ac} &= x_0 \\ \frac{2ae - bd}{b^2 - 4ac} &= y_0 \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36).$$

Dividera vi den sednare likheten (34) med den förra, så följer deraf, emedan $\frac{n_{,}}{n}$ befinnes vara $= \operatorname{tg} p_{,}$:

$$\frac{y_{,} - y_0}{x_{,} - x_0} = \frac{n_{,}}{n} = \operatorname{tg} p_{,} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37);$$

(37) visar, att focus $x_{,}\, y_{,}$ alltid måste ligga på en rät linea (storaxeln) som går genom den fixa punkten $x_0\, y_0$ (centrum) i riktningen $p_{,}$. Ett annat uttryck på denna räta linea erhålla vi af (32):

$$y_{,} = \operatorname{tg} p_{,} \,.\, x_{,} + \frac{e \operatorname{Cos} p_{,} - d \operatorname{Sin} p_{,}}{b \operatorname{Sin} p_{,} - 2c \operatorname{Cos} p_{,}} = \operatorname{tg} p_{,}\, x_{,} + h \quad . \; . \; . \quad (38).$$

Enligt (38) erhålles således ordinatan i origo (hvilken vi kallat h) till kurvans storaxel:

$$h = \frac{e \operatorname{Cos} p, - d \operatorname{Sin} p,}{b \operatorname{Sin} p, - 2c \operatorname{Cos} p,}.$$

Genom insättning af (34) i (33) erhålles:

$$\frac{f^2}{m} + f(x_0 + ln, y_0 + ln,) = \frac{f^2}{m} + f(x_0, y_0)$$

$$+ l\{n(2ax_0 + by_0 + d) + n,(2cy_0 + bx_0 + e)\} + l^2\{an^2 + bnn, + cn,^2\} = 0.$$

Genom insättning af värdena x_0 y_0 ur (36) blir l:s koefficient $= 0$. Insättes dessutom värdena n och $n,$ ur (35), så få vi följande uttryck på l:

$$l = \sqrt{\frac{ae^2 + cd^2 - bde + (b^2 - 4ac)f}{b^2 + 2(a^2 + c^2 + \frac{a+c}{m})}} \cdot m \quad . \; . \; . \; . \quad (39).$$

I (39) uttrycker l en numerisk storlek, hvarföre det negativa rottecknet icke behöfver komma i fråga. För ellipsen och parabeln är nämnaren i (39) ovilkorligen positiv, emedan $a + c$ och m alltid äro af samma tecken, då således för reelt l täljaren $ae^2 + cd^2 - bde + (b^2 - 4ac)f$ och m måste ha samma tecken. För hyperbeln ega vi deremot att välja det tecken för m, som ger l ett reelt värde, såvidt sådant värde är möjligt. Genom insättning af l:s värde i (34) erhålla vi koordinaterna för focus $x, y,$. Om vi vidare insätta $\pi + p,$ i st. f. $p,$, så erhålla vi på storaxeln en ny focus $x, y,$ i motsatt riktning och på lika afstånd som den andra från punkten x_0 y_0. Vi finna således för ellipsen och hyperbeln 2:ne punkter, som ega karakteren af focus. Afståndet från punkten x_0 y_0 till hvardera focus uttryckes enligt (34) med:

$$D = \pm l\sqrt{n^2 + n,^2} = \pm \frac{2\sqrt{\frac{1}{m}[ae^2 + cd^2 - bde + (b^2 - 4ac)f]}}{b^2 - 4ac} \quad . \; . \; . \quad (40).$$

För parabeln deremot är enligt (34) ena focus oändligt långt borta samt den andra uttryckt på ett indetermineradt sätt med $\infty - \infty$. Om vi betrakta $x, y,$ i (38) såsom betecknande punkter i allmänhet på storaxeln eller, som den här kallas, diametern, så kunna vi genom elimination mellan räta linien:

$$y = \operatorname{tg} p, x + h \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (41),$$

der h enligt (38) betecknar ordinaten i origo, samt parabelns eqvation:

$$f(x, y) = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

bestämma koordinaterna s och t för parabelns hjessa (skärningspunkten mellan parabeln och dess diameter). Vi finna genom insättning af (41) i (42) samt af de ur (29) härledda värdena $\text{tg}^2 p_{,} = \frac{a}{c}$ och $\text{tg}\, p_{,} = \frac{-2a}{b}$:

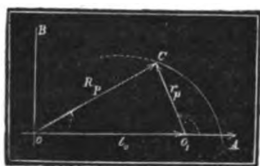
$$\left.\begin{aligned} x &= s = b\frac{[f + h(e + ch)]}{2ae - bd} \\ y &= t = -2a\frac{[f + h'(d + ah')]}{2ae - bd} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (43),$$

då vi för symetriens skull sätta abscissan i origo eller $-h \operatorname{Cotg} p_{,} = h'$. Emedan enligt (20) afståndet från parabelns focus till dess hjessa är $= \frac{l}{2}$, så följer deraf:

$$\left.\begin{aligned} x_{,} &= s + \frac{l \operatorname{Cos} p_{,}}{2} \\ y_{,} &= t + \frac{l \operatorname{Sin} p_{,}}{2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44),$$

hvarigenom vi således fullständigt solverat problemet om focus och direktricen.

Ex. 3. *Att bestämma läget af sådana punkter C, som fixeras af 2:ne radii vectores med hvar sitt origo O och $O_{,}$, då dessa radiers arithmetiska summa är konstant.*



Uppställningen är densamma som i ex. 2, utom att r_p beskrifver positiva bågar och börja i R_p:s grundriktning, d. v. s. $p_{,} = 0$:

$$R_P = l_o + r_p \quad . \quad . \quad . \quad (45).$$

Vilkorets eqvation är här:

$$R + r = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

der c betecknar en konstant. Projiciera (45):

$$\left.\begin{aligned} R \operatorname{Cos} P &= l_0 + r \operatorname{Cos} p \\ R \operatorname{Sin} P &= r \operatorname{Sin} p \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47).$$

Eliminera r och p mellan (46) och (47) och sätt

$$c = 2a \text{ och } l = 2a . e,$$

så erhålles:

$$R = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e \operatorname{Cos} P} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (48)$$

således en ellips. Halfva storaxeln i ellipsen utmärkes här af a och excentriciteten af e.

Sätta vi vilkors-eqvationen:

$$R - r = c,$$

så få vi på samma sätt hyperbelns polareqvation.

Vi vilja belysa vår antydda analytiska method ur en ny synpunkt. Om, under det r_p beskrifver en kurva, dess origo, fixeradt af ϱ_φ, *rör sig* enligt en viss lag, beroende af de föränderliga värdena på r och p, så kunna vi söka motsvariga kurvan R_P. Detta generella problem ger 6 variabla, då 3 vilkorseqvationer erfordras, för att såsom eliminationsresultat erhålla en relation mellan 2:ne af dessa 6. Problemet representeras derföre af geometriska likheten:

$$R_P = \varrho_\varphi + 1_{p,} . r_p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (49)$$

samt vilkorseqvationerna:

$$\left.\begin{aligned} r &= f\,(p) \\ \varrho &= f_1\,(r, p) \\ \varphi &= f_{11}\,(r, p) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (50).$$

Anm. I stället för att såsom i (50) ha vilkorseqvationerna gifna i storlekar och riktningar kunna vi naturligtvis ha dem gifna i de geometriska qvantiteternas projektioner. Eqvationerna (50) uttrycka nämligen ingenting annat än qvantiteternas inbördes beroende af hvarandra.

Vi specialicera detta generella problem i några enkla exempel.

Ex. 4. *Hvad är motsvariga kurvan R_P till en cirkel r_p, hvars origo rör sig efter grundriktningen på vinkelräta afståndet r med lika stor hastighet, som den af r_p beskrifna cirkelbågen växer?*

Vi antaga R_p:s grundbestämningar origo O och grundriktningen OA såsom våra på förhand fastställda grundbestämningar, hvartill vi således ega att reducera r_p. Vi låta r_p beskrifva negativa bågar och börja i riktningen $\frac{3\pi}{2}$, då således $p_{\prime} = \frac{3\pi}{2}$. Om vi med a beteckna en konstant, så blir uppställningen af vårt problem:



$$R_p = \varrho_\varphi + 1_{\frac{3\pi}{2}} \cdot r_{-p} \quad \ldots (51)$$

samt

$$\left. \begin{aligned} r &= a \\ \varrho \operatorname{Cos} \varphi &= r \cdot p \\ \varrho \operatorname{Sin} \varphi &= r \end{aligned} \right\} \ldots (52).$$

Projiciera (51) och eliminera r, ϱ och φ, så erhålles:

$$\left. \begin{aligned} X &= a \cdot p - a \operatorname{Sin} p \\ Y &= \quad a - a \operatorname{Cos} p \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (53).$$

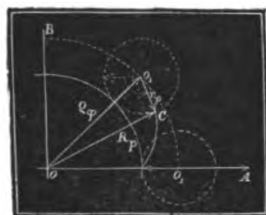
Eliminera p i (53), så fås såsom uttryck på den sökta kurvan R_p:

$$X = a \cdot \operatorname{arc} \operatorname{Cos} \frac{a - Y}{a} - \sqrt{2aY - Y^2} \quad . \; . \; . \quad (54),$$

hvilket utgör den vanliga formeln för *cykloiden.*

Ex. 5. *Hvad är motsvariga kurvan* R_p *till en cirkel* r_p, *hvars origo rör sig på en cirkelperiferi så, att den af* $(\varrho - r)_\varphi$ *fixerade punkten har lika stor hastighet, som den af* r_p *beskrifna cirkelbågen växer?*

Vi utgå ifrån samma grundbestämningar som i föregående exempel. Vi antaga här r_p beskrifva positiva bågar och börja i riktningen π, då således $p_{\prime} = \pi$. Vår uppställning af problemet blir således, om a och a_1 beteckna konstanter:



$$R_p = \varrho_\varphi + 1_\pi \cdot r_p \quad \ldots (55)$$

samt

$$\left. \begin{aligned} r &= a \\ \varrho &= a_1 \\ (\varrho - r) \cdot \varphi &= r \cdot p \end{aligned} \right\} \ldots (56).$$

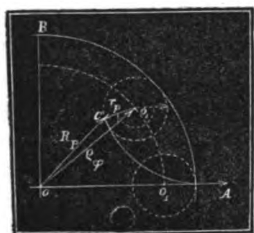
Tag projektionerna och eliminera r, ϱ och φ, så följer deraf:

$$\left.\begin{aligned} X &= a_1 \ \mathrm{Cos}\,\frac{a\,.\,p}{a_1 - a} - a \ \mathrm{Cos}\,p \\ Y &= a_1 \ \mathrm{Sin}\,\frac{a\,.\,p}{a_1 - a} - a \ \mathrm{Sin}\,p \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (57).$$

Detta utgör den generella formeln för *epicykloiden.* En elemination af p skulle ge epicykloiden, uttryckt i X och Y. Sätta vi $a_1 - a = b$ och eliminera a_1, så få vi epicykloiden uttryckt i den fixa och den genererande cirkelns radier.

Ex. 6. *Hvad är motsvariga kurvan R_p till en cirkel r_p, hvars origo rör sig på en cirkelperiferi så, att den af $(\varrho + r)_\varphi$ fixerade punkten har lika stor hastighet, som den af r_p beskrifna cirkelbågen växer?*

Vi utgå från R_p:s grundbestämningar. Vi antaga r_p beskrifva negativa bågar och börja i grundriktningen OA, då således $p_i = 0$. Vårt problem uppställdt får då följande utseende, då vi med a och a_1 beteckna konstanter.



$$R_p = \varrho_\varphi + r_{-p} \ldots (58)$$

samt

$$\left.\begin{aligned} r &= a \\ \varrho &= a_1 \\ (\varrho + r)\,.\,\varphi &= r\,.\,p \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (59).$$

Om vi projiciera (58) och eliminera r, ϱ och φ, så följer deraf:

$$\left.\begin{aligned} X &= a_1\,.\ \mathrm{Cos}\,\frac{a\,.\,p}{a_1 + a} + a \ \mathrm{Cos}\,p \\ Y &= a_1\,.\ \mathrm{Sin}\,\frac{a\,.\,p}{a_1 + a} - a \ \mathrm{Sin}\,p \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (60),$$

hvarigenom vi således erhållit en generell formel för *hypocykloiden* Sätta vi $a_1 + a = b$ och eliminera a_1, så få vi hypocykloiden uttryckt i den fixa och den genererande cirkelns radier.

Vi anföra här ett exempel, der vi med fördel kunna använda den i (2) antydda methoden.

Hvad är motsvariga kurvan R_P till en kurva r_p, hvars origo $O_{,}$, fixeradt af ϱ_φ, rör sig på en cirkelperiferi med lika stor vinkelhastighet och åt samma led som r_p sjelf, och hvars storlek r växer proportionelt till vinkelhastigheten p?

Vi låta R_P vara hänförd till origo O och grundriktningen OA samt r_p till origo $O_{,}$ och grundriktningen $O_{,}A_{,}$. Vi reducera r_p till R_P:s grundbestämningar, då således, om a och a_1 beteckna konstanter, problemet representeras af geometriska likheten:

$$R_P = \varrho_\varphi + 1_{p_{,}} . r_p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (61)$$

samt vilkorseqvationerna:

$$\left.\begin{aligned} r &= a . p \\ \varrho &= a_1 \\ \varphi &= p \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (62).$$

Om vi i (61) insätta för r, ϱ och φ deras värden ur (62), så erhålla vi:

$$R_P = 1_p . \{a_1 + 1_{p_{,}} . ap\}$$

$$= \{a_1^2 + 2a_1\, ap \operatorname{Cos} p_{,} + (ap)^2\}^{\frac{1}{2}}_{\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Sin} p_{,}}{\frac{a_1}{ap} + \operatorname{Cos} p_{,}} + p},$$

hvaraf följer:

$$\left.\begin{aligned} R &= \{a_1^2 + 2a_1\, ap \operatorname{Cos} p_{,} + (ap)^2\}^{\frac{1}{2}} \\ P &= p + \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Sin} p_{,}}{\frac{a_1}{ap} + \operatorname{Cos} p_{,}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (63).$$

Vi särskilja tvenne fall, då eliminationen af p i (63) låter verkställa sig.

1:o då $p_{,} = \pm \frac{\pi}{2}$, hvaraf erhålles:

$$R = \{a_1^2 + (ap)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$P = p + \operatorname{arctg} \frac{(\pm ap)}{a_1},$$

då således:

$$P = \frac{\sqrt{R^2 - a_1^2}}{a} + \operatorname{arctg} \frac{(\pm \sqrt{R^2 - a_1^2})}{a_1} \quad . \; . \; . \quad (64).$$

2:o då $p_{\prime} = k\pi$, der vi antaga k betyda 0 eller 1. Af (63) erhålles då:

$$R = a_1 + ap_{k\pi}$$

$$P = p,$$

hvaraf följer:

$$R = a_1 + aP_{k\pi} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (65).$$

I (65) ha vi erhållit uttrycket på en *Archimedis spiral*, som, för positivt P, går inifrån och utåt, då k är $= 0$, samt utifrån och inåt, då k är $= 1$.

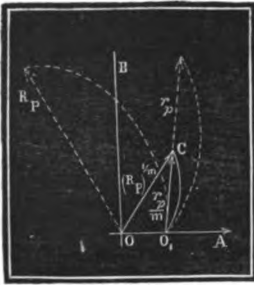
Vi kunna ytterligare generalisera problemet, som representeras af (49) och (50), derigenom, att vi äfven låta riktningen $p_{\prime}$ vara variabel, då således r_p:s båda grundbestämningar origo och grundriktning variera. Och i allmänhet kunna vi med stöd af formeln (4) i N:o 5 bestämma en rörlig punkt i förhållande till fixa grundbestämningar förmedelst huru många mellanliggande variabla grundbestämningar som helst, med vilkor, att för hvarje variabel storlek eller riktning, som kommer till, införes en ny vilkorseqvation.

Anm. Då vi här och öfverallt i detta N:o talat om grundbestämningar, så ha vi icke inbegripit enheten, hvilken öfverallt förutsättes vara densamma, hvilket ock har synts af sjelfva formlerna.

II. Vi taga såsom exempel den i N:o 8 (1) framställda funktionsformen, der vi antaga m i st. f. att kongvergera mot ∞ vara ett positivt eller negativt ändligt tal:

$$\left(R_p\right)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{r_p}{m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (66).$$

Såsom redan nämdes i N:o 8 (1) uttrycker denna likhet att $\frac{r_p}{m}$, utgående från det af 1_0 fixerade origo O, skall fixera samma



punkt som $\left(R_P\right)^{\frac{1}{m}}$, utgående från det fastställda origo O, då för öfrigt begge äro hänförda till samma enhet OO, och samma grundriktning OA. Vår uppgift är nu, att bestämma kurvan R_P, då vi ha kurvan r_p gifven under formen $r = f(p)$, eller tvärtom, att bestämma kurvan r_p, då vi ha R_P gifven under formen $R = f_1(P)$. Vi välja det förra fallet. Af (66) erhålla vi.

$$\left.\begin{aligned} R^{\frac{1}{m}} \cdot \operatorname{Cos} \frac{P}{m} &= 1 + \frac{r}{m} \cdot \operatorname{Cos} p \\ R^{\frac{1}{m}} \cdot \operatorname{Sin} \frac{P}{m} &= \frac{r}{m} \cdot \operatorname{Sin} p \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \quad (67),$$

hvilka jemte vilkonseqvationen:

$$r = f(p) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (68)$$

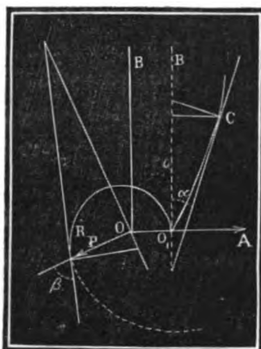
äro tillräckliga att bestämma kurvan R_P. Det är lätt, att på ett ungefär uppvisa dessa kurvors inbördes förhållande. Känna vi nämligen kurvan r_p, så ega vi att bestämma en likformig kurva $\frac{r_p}{m}$ hvars dimensioner äro m:te delen af den förra. Denna kurvas punkter skola vidare fixeras af $\left(R_P\right)^{\frac{1}{m}}$, hvaraf vi finna, att då m växer vare sig såsom positivt eller negativt tal, så, under det r_p:s vinkel p är deraf helt och hållet oberoende, blir deremot R_P:s vinkel P alltid m gånger så stor som vinkeln COA, hvaraf synes, att R_P med m:s tillväxande måste närma sig karakteren af spiral, hvilken kurva än r_p må beskrifva. Vi gå nu att undersöka detta kurvan R_P:s spiralförhållande till kurvan r_p för lim $m = \pm \infty$.

III. Vi hafva enligt N:o 8 (16):

$$R_P = \lim \left(1 + \frac{r_p}{m}\right)^m = e^x_y = e^{x + y\frac{\pi}{2}} = e^{r_p} \ . \ . \ . \quad (69),$$

hvaraf erhålles enligt N:o 2 (14):

$$\left.\begin{array}{l} R = e^x \\ P = y \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (70).$$



Om vi nu ha en vilkorseqvation:

$$x = f(y) \quad \ldots\ldots \quad (71)$$

representerande kurvan r_p eller O, C, så erhålla vi genom elimination mellan (70) och (71) af x och y:

$$R = e^{f(P)} \quad \ldots\ldots \quad (72)$$

såsom eqvation på motsvariga kurvan R_P, hvilken kurva således utgör en *logarithmisk spiral*, hvars form och beskaffenhet bestämmes af funktionsformen f. Mellan denna spiral R_P och kurvan r_p förefinnes ett högst egendomligt förhållande, funktionsformen f må vara hvilken som helst. Låt α representera vinkeln, som kurvan r_p:s tangent bildar med den vinkelräta riktningen O, B, samt β vinkeln mellan spiralens radius vector och tangent. Af differential-kalkylen veta vi att:

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(y) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (73)$$

samt

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{R}{\frac{dR}{dP}} = \frac{e^{f(P)}}{\frac{d\left(e^{f(P)}\right)}{dP}} = \frac{1}{f'(P)} \quad \ldots\ldots \quad (74).$$

Men enligt (70) är $P = y$, då således:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{f'(P)} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{Cotg} \alpha,$$

hvaraf följer:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (75).$$

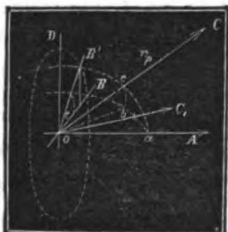
Beteckna vi derföre spiralens tangent, subtangent, normal och

subnormal med T, S_t, N och S_n, samt kurvan r_p:s nämnde linier med T', S'_t, N' och S'_n, så erhålla vi på grund af (75):

$$\frac{T}{T'} = \frac{S_t}{S'_t} = \frac{N}{N'} = \frac{S_n}{S'_n} = \frac{e^x}{x} = \frac{e^{f(y)}}{f(y)} \quad . \; . \; . \quad (76).$$

10.

Geometriska qvantiteters reduktion till nytt plan.



Om vi ha en punkt C i ett plan $o\,A\,B'$, så kan den enligt föregående bestämmas till sitt läge i detta plan af en geometrisk qvantitet r_p, så snart dess origo o, enhet $o\,a$ och grundriktning $o\,A$ äro gifna. Likaledes kunna vi bestämma en punkt $C_{\prime}$ i ett annat plan $o\,A\,B$ medelst en geometrisk qvantitet t. ex. ϱ_φ, så snart vi ha hans tre grundbestämningar: origo, enhet och grundriktning gifna. Om vi känna förhållandet mellan dessa qvantiteters nyssnämda grundbestämningar, så kan likväl ingen jemförelse mellan qvantiteterna sjelfva ega rum, innan vi känna det inbördes läget af deras plan. För att kunna bestämma detta läge, få vi till en början förutsätta origo, enhet och grundriktning *lika* hos qvantiteter i det ena och andra planet. Utgå vi derföre från planet $o\,A\,B$ såsom vårt på förhand fastställda plan, hvartill vi vilja hänföra våra punkter, så är punkten C i planet $o\,A\,B'$ fullt bestämd till sitt läge genom genom geometriske qvantiteten:

$$(r_p)_t,$$

der r_p betecknar en storlek med sin riktning i planet $o\,A\,B'$ och t den vinkel, som detta plan bildar med vårt fastställda plan $o\,A\,B$, och hvilken vi derföre kalla *planvinkel.* Punkten C i planet $o\,A\,B'$ kan således nu jemföras till sitt läge med en punkt $C_{\prime}$ i planet $o\,A\,B$. Vi kalla planet $o\,A\,B'$, hvari qvantiteten r_p ligger, för hans *eget* eller

egentliga plan samt planet $o\,A\,B$, hvartill vi hänfört honom, för hans *nya* plan. Vi säga nu, *att vi reducerat en geometrisk qvantitet* r_p *till ett nytt plan* $o\,A\,B$, *i förhållande till hvilket hans eget plan* $o\,A\,B'$ *bestämmes af en vinkel t.*

Planet $o\,A\,B'$, såsom bestämdt till sitt läge i förhållande till det nya planet $o\,A\,B$ förmedelst planvinkeln t, kalla vi korteligen *planet t.* Vi säga derföre om en geometrisk qvantitet $\left(r_p\right)_t$ *att han ligger i planet* t, i stället för att säga, *att hans eget plan bildar med det nya planet, hvartill han blifvit hänförd, en vinkel t.*

Planet utgör nu såsom det redan antyddes i N:o 1 vår *fjerde grundbestämning.* För att någon inbördes jemförelse mellan geometriska qvantiteter skall kunna ega rum, fordras således, *att de skola vara reducerade till lika enhet, grundriktning, origo och plan.*

Den vinkel, som två plan bilda med hvarandra, bestämmes genom den lutning, som tvenne till hvardera planet hörande, från samma punkt utgående och mot skärningslinien vinkelräta linier bilda med hvarandra. Planvinkeln t, hvilken vi ega att räkna från vårt nya plan, utgöres således här af vinkeln $B'\,o\,B$, som de från samma punkt o utgående och mot den gemensamma grundriktningen (skärningslinien) vinkelräta axlarna $o\,B'$ och $o\,B$ bilda med hvarandra. Denna vinkel ligger, som vi se, i ett mot planen $o\,A\,B'$ och $o\,A\,B$ vertikalt plan $o\,B\,B'$, och att bestämma t sammanfaller derföre helt och hållet med att uti detta vertikalplan bestämma riktningen $o\,B'$ i förhållande till riktningen $o\,B$ som grundriktning. Enligt N:o 1 kunna vi bestämma hvarje riktning med motsvarande båglängder med 1 till radie. Upprita vi derföre en cirkel i nyssnämnda vertikalplan med o till medelpunkt och $o\,a = 1$ till radie och gående genom de vinkelräta axlarna $o\,B$ och $o\,B'$, och kalla vi denna cirkels omkrets $2\,\omega$ till längden således $= 2\,\pi$, *så representeras hvarje vinkel t af delar af* $2\,\omega$, då hvarje värde på t kan anses innefattas mellan gränsorna 0 och $2\,\omega$. Generelt taget kan hvarje värde på t tänkas ökad med $2\,k\,\omega$, då följaktligen en till nytt plan reducerad geometrisk qvantitet tecknas generelt:

$$\left(r_{p\,+\,2k\pi}\right)_{t\,+\,2\,k\omega}.$$

Då vi nu och framgent tala om en geometrisk qvantitets *vertikalplan*, så förstå vi alltid det plan, som står vinkelrät mot det nya plan, hvartill qvantiteten blifvit reducerad, och som skär detsamma

efter den vinkelräta riktningen. Det nya plan åter, hvartill qvantiteten blifvit reducerad och som skäres af vertikalplanet efter den vinkelräta riktningen och bildar med detsamma räta vinklar, komma vi att benämna *grundplan*. Qvantitetens eget plan deremot eller det plan, hvarifrån qvantiteten blifvit reducerad till det nya planet eller grundplanet, benämna vi, såsom ofvan nämdes, af dess *planvinkel*. Vi komma ock att i stället för planvinkel använda benämningen *planriktning*, då vi dermed förstå den riktning i vertikalplanet som representeras af planvinkeln. I enlighet med N:o 2 II benämna vi derföre planriktningen $t + \omega$ *negativ*, i förhållande till planriktningen t, betraktad som *positiv*. Med anledning deraf säga vi om ett plan t, betraktadt i den positiva planriktningen t, att det har ett *positivt läge*, i förhållande till samma plan, betraktadt såsom vridet en vinkel ω eller i den negativa planriktningen $t + \omega$, då det säges ha ett *negativt läge*. Planet är naturligtvis i begge fallen ett och detsamma, endast betraktadt ur olika synpunkter.

Vi hafva nu bragt vår planreduktion, att uteslutande bero på bestämmandet af en riktning i vertikalplanet i förhållande till grundplanets vinkelräta riktning som grundriktning. De lagar för riktningen som i föregående N:is blifvit utvecklade gälla derföre i hela sin utsträckning för riktningar i detta vertikalplan, då följaktligen de reduktioner vi här komma att afhandla utgöra rena tillämpningar af nämde lagar. Således är möjligheten för oss nu öppnad, att endast med införandet af det nya tecknet 2ω, såsom utmärkande cirkelomkretsen i vertikalplanet och hvaruti hvarje planvinkel ingår såsom en del, bestämma fullt tillförlitliga lagar för beräknandet af våra planreduktioner.

Vi gå nu att framställa några högst vigtiga satser, hvilkas riktighet omedelbart inses på grund af de begrepp vi i detta N:o utvecklat.

1.
$$\left.\begin{aligned} (r_p)_t &= (r_{-p})_{t+\omega} \\ (r_{-p})_t &= (r_p)_{t+\omega} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

d. v. s. *en geometrisk qvantitets båge p öfvergår, under det qvantitetens plan vrides 180^0, från positiv till negativ, eller tvärtom från negativ till positiv; eller m. a. o. en geometrisk qvantitets båge p ändrar tecknen, under det hans plan öfvergår från positivt till negativt läge, eller tvärtom från negativt till positivt.*

2. $$\left\{(r_p)_t\right\}_{t_\prime} = (r_p)_{t+t_\prime} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

d. v. s. *om vi förmedelst en planvinkel $t_\prime$ till ett nytt plan ytterligare reducera en geometrisk qvantitet $(r_p)_t$, så ega vi att addera planvinklarna t och $t_\prime$.*

Denna sats är sjelfklar på grund af N:o 3.

3. Likasom vi i N:o 4 funno såsom uttryck på en geomktrisk summas reduktion till ny grundriktning i grundplanet:

$$1_\varphi \, . \, \{r_p + r'_{p_\prime}\} = r_{p+\varphi} + r'_{p_\prime+\varphi},$$

så finna vi här såsom uttryck på en geometrisk summas reduktion till ny grundriktning i vertikalplanet:

$$\left\{(r_p)_t + (r'_{p_\prime})_{t_\prime}\right\}_\theta = (r_p)_{t+\theta} + (r'_{p_\prime})_{t_\prime+\theta} \quad . \; . \; . \quad (3)$$

d. v. s. *om vi vilja reducera en summa af tvenne till samma grundplan reducerade geometriska qvantiteter $(r_p)_t$ och $(r'_{p_\prime})_{t_\prime}$ till ett nytt grundplan förmedelst planvinkeln θ, så ha vi att till de respective planvinklarna t och $t_\prime$ addera θ.*

Denna sats gäller tydligen för huru många summander som helst, hvilken form de än må ha.

Följande 3:ne satser få vi uttala med en särdeles stark betoning, såsom öfverallt förekommande vid våra reduktionsberäkningar.

4. $$(r_{k\pi})_t = r_{k\pi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

d. v. s. *en reduktion till ny grundriktning i vertikalplanet har icke något inflytande på qvantiteter i grundplanets grundriktning.*

Denna sats är sjelfklar derutaf, att en grundriktningsförändring i vertikalplanet icke kan åstadkomma någon annan förändring hos en qvantitet i grundplanets grundriktning, än en vridning omkring honom sjelf såsom axel; men en rät lineas vridning omkring sig sjelf såsom axel är inom geometrien tydligen utan all betydelse.

5. $$\left.\begin{aligned}\left(r_{k\pi+\frac{\pi}{2}}\right)_t &= \left(r_{k\pi+\frac{\pi}{2}}\right)\left(\operatorname{Cos} t + \operatorname{Sin} t_{\frac{\omega}{2}}\right) \\ &= \left(r_{k\pi+\frac{\pi}{2}}\right)\operatorname{Cos} t + \left(r_{k\pi+\frac{\pi}{2}}\right)\operatorname{Sin} t_{\frac{\omega}{2}}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

d. v. s. *en reduktion till ny grundriktning i vertikalplanet har inflytande på qvantiteter i grundplanets vinkelräta riktning, ithy att denna riktning utgör på samma gång vertikalplanets grundriktning.*

Betraktad såsom tillhörande vertikalplanets grundriktning teckna vi qvantiteten $r_{k\pi+\frac{\pi}{2}}$ med parenthes; betraktad åter såsom tillhörande grundplanets vinkelräta riktning teckna vi honom utan parenthes. Deraf följer såsom ett enskildt uttryck af nyss anförda sats:

$$\left(r_{k\pi+\frac{\pi}{2}}\right)\operatorname{Cos} t = r\operatorname{Cos} t_{k\pi+\frac{\pi}{2}} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Vi skrifva derföre ock för symetriens skull:

$$\left(r_{k\pi+\frac{\pi}{2}}\right)\operatorname{Sin} t_{\frac{\omega}{2}} = \left(r\operatorname{Sin} t_{k\pi+\frac{\pi}{2}}\right)_{\frac{\omega}{2}} \quad \ldots , \quad (7)$$

6. $$1_p \cdot \left(r_{k\pi+\frac{\pi}{2}}\right)_{k\omega+\frac{\omega}{2}} = \left(r_{k\pi+\frac{\pi}{2}}\right)_{k\omega+\frac{\omega}{2}} \quad \ldots \quad (8)$$

d. v. s. *en reduktion till ny grundriktning i grundplanet har icke något inflytande på qvantiteter i vertikalplanets vinkelräta riktning.*

Denna sats är liksom 4 sjelfklar derutaf, att en grundriktnings förändring i grundplanet icke kan åstadkomma någon annan förändring hos en qvantitet i vertikalplanets vinkelräta riktning, än en vridning omkring honom sjelf såsom axel; men en rät lineas vridning omkring sig sjelf såsom axel är, såsom redan nämdt är i 4, utan all geometrisk betydelse.

Vertikalplanets vinkelräta riktning kalla vi korteligen *vertikalriktning.*

Slutligen få vi uttala följande tvenne vigtiga satser, hvilka identifiera våra planreduktioner med bestämmande af punkters lägen i rymden, hvarigenom vi således på samma gång befinna oss inom de tre utsträckningarnas eller rymdens geometri.

7. Om vi tänka oss planet $o\,A\,B$ fixt samt planet $o\,A\,B'$ utdraget i oändlighet åt alla håll, så berör det sednare under sin vridning omkring grundriktningen från $t = 0$ till $t = \omega$ eller från $t = \omega$ till

$t = 2\omega$ alla tänkbara punkter i rummet, vare sig således vi betrakta planet t i dess positiva eller negativa läge. Emedan vi med en geometrisk qvantitet r_p kunna bestämma hvilken punkt som helst i planet t eller planet $t + \omega$, så följer deraf, *att vi med en till nytt plan reducerad geometrisk qvantitet* $\left(r_p\right)_t$ *kunna bestämma hvilken tänkbar punkt som helst i rummet.*

Då vi framdeles tala om en geometrisk qvantitet $\left(r_p\right)_t$ ur denna synpunkt, så inskränka vi icke t till någondera af ofvan angifna begränsningar inom 1:ta och 2:dra eller inom 3:dje och 4:de qvadranterna, utan låta t:s gränser innefatta mellan sig hela omkretsen 2ω, hvarigenom således den till nytt plan reducerade geometriska qvantiteten framstår såsom ett generelt uttryck för begge ofvan angifna fall.

8. Vi skärskåda vår reducerade geometriska qvantitet $\left(r_p\right)_t$ ur en annan synpunkt. Om vi tänka oss planet t utdraget i oändlighet endast på den sidan om grundriktningen, som ligger åt den positiva vinkelräta riktningen, eller endast på den sidan, som ligger åt den negativa vinkelräta riktningen, så berör det i hvilketdera fallet som helst under sin vridning från $t = 0$ till $t = 2\omega$ alla tänkbara punkter i rummet, då således *en geometrisk qvantitet* $\left(r_p\right)_t$, *hvars båge p ligger inom 1:ta och 2:dra qvadranterna, eller ock inom 3:dje och 4:de qvadranterna, kan bestämma hvilken tänkbar punkt som helst i rummet, då nämligen t:s gränser innefatta mellan sig hela omkretsen 2ω.* Äfven för dessa tvenne fall framstår den till nytt plan reducerade geometriska qvantiteten såsom ett generelt uttryck.

Med stöd af ofvan anförda satser 3, 4 och 5 kunna vi nu sönderlägga en geometrisk qvantitet $\left(r_p\right)_t$. Vi sätta:

$$\left.\begin{aligned} r \operatorname{Cos} p &= x \\ r \operatorname{Sin} p &= y \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9),$$

då således:

$$\left(r_p\right)_t = \left(x + y_{\frac{\pi}{2}}\right)_t = x + \left(y_{\frac{\pi}{2}}\right)_t = x + y \operatorname{Cos} t_{\frac{\pi}{2}} + \left(y \operatorname{Sin} t_{\frac{\pi}{2}}\right)_{\frac{\omega}{2}} \ldots (10).$$

Sätta vi vidare:

$$\left.\begin{aligned} y \text{ Cos } t &= \eta \\ y \text{ Sin } t &= \zeta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11),$$

så finna vi, emedan

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ y^2 &= \eta^2 + \zeta^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

samt

$$\left.\begin{aligned} p &= \text{arctg}\,\frac{y}{x} \\ t &= \text{arctg}\,\frac{\zeta}{\eta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13):$$

$$\left.\begin{aligned} (r_p)_t &= r\left\{\text{Cos}\,p + \text{Sin}\,p\;\text{Cos}\,t_{\frac{\pi}{2}} + \left(\text{Sin}\,p\;\text{Sin}\,t_{\frac{\pi}{2}}\right)_{\frac{\omega}{2}}\right\} \\ &= x + \eta_{\frac{\pi}{2}} + \left(\zeta_{\frac{\pi}{2}}\right)_{\frac{\omega}{2}} = \left\{\left(x^2+\eta^2+\zeta^2\right)^{\frac{1}{2}}_{\text{arctg}\frac{y}{x}}\right\}_{\text{arctg}\frac{\zeta}{\eta}} \\ &= \left\{\left(x^2+\eta^2+\zeta^2\right)^{\frac{1}{2}}_{\text{arctg}\,\pm\frac{\sqrt{\eta^2+\zeta^2}}{x}}\right\}_{\text{arctg}\frac{\zeta}{\eta}} \end{aligned}\right\} \ldots (14).$$

Vi skola straxt i frågan om summationen undersöka den särskilda betydelsen af den positiva och negativa roten i arctg $\pm\frac{\sqrt{\eta^2+\zeta^2}}{x}$.

Anm. I stället för x, η, ζ komma vi framdeles att för symetriens skull för det mesta skrifva x, y, z och X, Y, Z.

Enligt (14) kunna vi nu summera tvenne eller flera till samma plan reducerade geometriska qvantiteter, om vi genom projiciering sönderlägga hvar och en af dem och kalla summan af qvantiteterna i grundriktningen för X, i den vinkelräta riktningen för Y och i den vertikala riktningen för Z. Vi finna således summan af 2:ne geometriska qvantiteter:

$$(r_p)_t + (r'_{p,})_{t,} = \left\{\left(X^2+Y^2+Z^2\right)^{\frac{1}{2}}_{\text{arctg}\,\pm\frac{\sqrt{Y^2+Z^2}}{X}}\right\}_{\text{arctg}\frac{Z}{Y}},$$

då nämligen:

$$\left.\begin{aligned}
(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{1}{2}} &= (r^2+2rr'[\mathrm{Cos}\,p\ \mathrm{Cos}\,p_, + \mathrm{Sin}\,p\ \mathrm{Sin}\,p_,\ \mathrm{Cos}\,(t_,-t)] + r'^2)^{\frac{1}{2}} \\
\mathrm{arctg}\ \frac{\pm\sqrt{Y^2+Z^2}}{X} &= \mathrm{arctg}\ \frac{\pm\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}^2 p + 2rr'\,\mathrm{Sin}p\,\mathrm{Sin}\,p_,\mathrm{Cos}(t_,-t) + r'^2\,\mathrm{Sin}^2 p_,}}{r\ \mathrm{Cos}\,p + r'\ \mathrm{Cos}\,p_,} \\
\mathrm{arctg}\ \frac{Z}{Y} &= \mathrm{arctg}\ \frac{r\ \mathrm{Sin}\,p\ \mathrm{Sin}\,t + r'\ \mathrm{Sin}\,p_,\ \mathrm{Sin}\,t_,}{r\ \mathrm{Sin}\,p\ \mathrm{Cos}\,t + r'\ \mathrm{Sin}\,p_,\,\mathrm{Cos}\,t_,}
\end{aligned}\right\}\ (15).$$

I (15) ha vi således uttryckt ifrågavarande summa i en enda geometrisk qvantitet af formen $(R_P)_T$.

Med stöd af (3) kunna vi här, liksom i N:o 7 (5), omedelbart ur (15) härleda ett enklare uttryck för planvinkeln. Vi finna nämligen:

$$(r_p)_t + (r'_{p_,})_{t_,} + \left\{(r_p)_o = (r'_{p_,})_{t_,-t}\right\}_t$$

$$= \left\{(\quad)^{\frac{1}{2}}_{\mathrm{arctg}\ \pm\frac{\sqrt{\quad}}{r\ \mathrm{Cos}p + r'\ \mathrm{Cos}p_,}}\right\}_{\mathrm{arctg}\ \frac{r'\ \mathrm{Sin}p_,\ \mathrm{Sin}(t_,-t)}{r\mathrm{Sin}\,p + r'\mathrm{Sin}p_,\mathrm{Cos}(t_,-t)} + t} \quad \ldots\ (16).$$

Planvinkeln, som representeras af $\mathrm{arctg}\ \frac{Z}{Y}$, eller närmare uttryckt, af $\mathrm{arctg}\ \frac{r\mathrm{Sin}p\mathrm{Sin}t + r'\mathrm{Sin}p_,\ \mathrm{Sin}t_,}{r\mathrm{Sin}p\mathrm{Cos}t + r'\mathrm{Sin}p_,\mathrm{Cos}t_,}$ i (15) eller $\mathrm{arctg}\ \frac{r'\ \mathrm{Sin}p_,\mathrm{Sin}\,(t_,-t)}{r\mathrm{Sin}p + r_,\mathrm{Sin}p_,\mathrm{Cos}(t_, - t)} + t$ i (16), är här, liksom i N:o 7 (3), (4) och (5), fullt bestämd af täljarens och nämnarens positiva eller negativa tecken. Gränsvärdena för planvinkeln innefatta således mellan sig alla fyra qvadranterna eller hela omkretsen 2ω. Enligt satsen 8 kan derföre den båge, som representeras af $\mathrm{arctg}\ \frac{\pm\sqrt{Y^2+Z^2}}{X}$, vara inskränkt inom gränsorna af 1:sta och 2:dra eller ock inom gränserna af 3:dje och 4:de qvadranterna, hvilka tvenne fall motsvaras, som vi se, af den positiva och negativa roten i $\mathrm{arctg}\ \frac{\pm\sqrt{Y^2+Z^2}}{X}$. Räkna vi derföre vår planvinkel från 0 till 2ω, så ega vi att använda den positiva roten; räkna vi deremot planvinkeln från ω till 3ω, d. v. s. betrakta vi planet $\mathrm{arctg}\ \frac{Z}{Y}$ i dess negativa läge, så ega vi att använda den negativa roten. Riktigheten af detta inses föröfrigt på grund af (1), samt deraf att alltid $\mathrm{arctg}\ \frac{\mp\sqrt{\ }}{X} = \mp\ \mathrm{arctg}\ \frac{\sqrt{\ }}{X}$, då nämligen bågen enligt ofvan inskränkes mellan gränsorna 0 och $\pm\pi$; då således:

$$\left\{\left(\quad\right)^{\frac{1}{2}}_{\text{arctg}\ \mp\frac{\sqrt{\ }}{X}}\right\}_{\text{arctg}\frac{Z}{Y}+\varpi}=\left\{\left(\quad\right)^{\frac{1}{2}}_{\text{arctg}\ \pm\frac{\sqrt{\ }}{X}}\right\}_{\text{arctg}\frac{Z}{Y}}\ldots(17).$$

Följdsatser:

I. Är i (15) och (16) $t_{,}=t$, så följer deraf:

$$\left(r_p\right)_t+\left(r'_{p,}\right)_t=\left\{\left(r^2+2rr'\,\text{Cos}\,(p_{,}-p)+r'^2\right)^{\frac{1}{2}}_{\text{arctg}\frac{r\,\text{Sin}p+r'\,\text{Sin}p_{,}}{r\,\text{Cos}p+r'\,\text{Cos}p_{,}}}\right\}_t\ldots(18)$$

d. v. s. ***geometriska qvantiteter, som hafva lika planriktning, kunna summeras i sitt gemensamma plan enligt N:o 7.***

Denna sats utgör föröfrigt en omedelbar följd af (3); ty

$$\left(r_p\right)_t+\left(r'_{p,}\right)_t=\left\{\left(r_p\right)_o+\left(r'_{p,}\right)_o\right\}_t=\left\{r_p+r'_{p,}\right\}_t=\text{etc.}$$

Af (18) härleda vi:

$$\left.\begin{aligned}\left(r_p\right)_t+\left(r'_p\right)_t&=\left\{\left(r+r'\right)_p\right\}_t\\ \left(r_p\right)_t+\left(r_{\pi+p}\right)_t&=\left\{\left(r-r'\right)_p\right\}_t\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(19)$$

d. v. s. ***qvantiteter, som hafva lika planriktning och lika eller motsatt riktning i sitt eget plan kunna direkt adderas till eller subtraheras från hvarandra.***

II. Är $t_{,}-t=\varpi$; så följer deraf:

$$\left(r_p\right)_t+\left(r'_{p,}\right)_{t+\varpi}=\left\{\left(r^2+2rr'\,\text{Cos}\,(p_{,}+p)+r'^2\right)^{\frac{1}{2}}_{\text{arctg}\frac{r\,\text{Sin}p-r'\,\text{Sin}p_{,}}{r\,\text{Cos}p+r'\,\text{Cos}p_{,}}}\right\}_t\ldots(20)$$

d. v. s. ***geometriska qvantiteter med motsatta planriktningar t och $t+\varpi$ summeras enligt N:o 7, som om deras riktningar i planet t representerades af bågar med motsatta tecken.***

Är $p_{,}$ i (20) negativ, så återfå vi (18), hvilket är klart på grund af (1).

Af (20) härleda vi:

$$\left.\begin{aligned}(r_p)_t + (r'_{-p})_{t+\omega} &= \left\{(r+r')_p\right\}_t \\ &\vdots \\ (r_p)_t + (r'_{-(\pi+p)})_{t+\omega} &= \left\{(r-r')_p\right\}_t\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (21)$$

d. v. s. *qvantiteter, som ha motsatta planriktningar och hvilkas riktningar i deras eget plan representeras af lika eller på 180° sig skiljande bågar med motsatt tecken, kunna direkt adderas till eller subtraheras från hvarandra.*

Vi anföra här en ny beteckning på en geometrisk qvantitet $(r_p)_t$, hvilken i våra följande räkningar blir af stor nytta och användbarhet. Om vi nämligen i stället för bågarna p och t begagna oss af bågarna $ab = m$ i grundplanet och $bc = n$ i det mot grundplanet vertikala planet obc (se föreg. fig.), så ega vi att mellan dem använda följande lätt funna relationer:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Cos} p &= \operatorname{Cos} n \operatorname{Cos} m \\ \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} t &= \operatorname{Cos} n \operatorname{Sin} m \\ \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} t &= \operatorname{Sin} n\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (22).$$

Då vi känna tvenne af dessa fyra bågar, så äro de tvenne öfriga fullt bestämda. I öfverensstämmelse med benämningarna inom astronomien kalla vi m *azimutbågen för p och t*, betecknad $az\,(p\,,t)$, samt n *höjdbågen* eller *zenitdistansens komplementbåge för p och t*, betecknad $cz\,(p\,,t)$, då således:

$$\left.\begin{aligned}m &= az\,(p\,,t) \\ n &= cz\,(p\,,t)\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23).$$

Vår nya beteckning blir derföre:

$$(r_p)_t = r_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} = r\left\{\operatorname{Cos} n \operatorname{Cos} m + \operatorname{Cos} n \operatorname{Sin} m_{\frac{\pi}{2}} + (\operatorname{Sin} n_{\frac{\pi}{2}})_{\frac{\omega}{2}}\right\} \quad . \; . \; . \quad (24).$$

Här betecknar $\frac{\omega}{2}$ i $n_{\frac{\omega}{2}}$ att n utgör en i allmänhet mot grundplanet vertikal båge. Föröfrigt beteckna vi såväl bågen n som bågen m såsom delar af omkretsen 2π. En geometrisk qvantitet under denna form representeras derföre såsom generell af följande teckning:

$$r_{(m+2k\pi)\,+\,(n+2k\pi)_{\frac{\omega}{2}}}.$$

Om vi sätta:

$$\left.\begin{aligned} r\,\mathrm{Cos}\,n\;\mathrm{Cos}\,m &= x \\ r\,\mathrm{Cos}\,n\;\mathrm{Sin}\,m &= y \\ r\,\mathrm{Sin}\,n &= z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (25),$$

så följer deraf:

$$\left.\begin{aligned} m &= \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} \\ n &= \mathrm{arctg}\,\frac{z}{\pm\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (26),$$

hvaraf vidare erhålles i stället för (24):

$$r_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} = x + y_{\frac{\pi}{2}} + \left(z_{\frac{\pi}{2}}\right)_{\frac{\omega}{2}} = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}{}_{\mathrm{arctg}\frac{y}{x}+\left(\mathrm{arctg}\frac{z}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}\right)_{\frac{\omega}{2}}} \quad \ldots (27).$$

Enligt (27) kunna vi nu summera tvenne eller flera till samma grundplan hörande geometriska qvantiteter af ofvanstående form, om vi sönderlägga hvar och en af dem enligt (24) och kalla summan af qvantiteterna i grundriktningen för X, i den vinkelräta riktningen för Y och i den vertikala riktningen för Z. Således finna vi summan:

$$r_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} + r'_{m'+n'_{\frac{\omega}{2}}} = (X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{1}{2}}{}_{\mathrm{arctg}\frac{Y}{X}+\left(\mathrm{arctg}\frac{Z}{\pm\sqrt{X^2+Y^2}}\right)_{\frac{\omega}{2}}},$$

då nämligen:

$$\left.\begin{aligned} (X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{1}{2}} &= (r^2+2rr'[\mathrm{Cos}n\mathrm{Cos}n'\mathrm{Cos}(m'-m)+\mathrm{Sin}n\mathrm{Sin}n']+r'^2)^{\frac{1}{2}} \\ \mathrm{arctg}\,\frac{Y}{X} &= \mathrm{arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Cos}\,n\;\mathrm{Sin}\,m + r'\,\mathrm{Cos}\,n'\;\mathrm{Sin}\,m'}{r\,\mathrm{Cos}\,n\;\mathrm{Cos}\,m + r'\,\mathrm{Cos}\,n'\;\mathrm{Cos}\,m'} \\ \mathrm{arctg}\,\frac{Z}{\pm\sqrt{X^2+Y^2}} &= \mathrm{arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,n + r'\,\mathrm{Sin}\,n'}{\pm\sqrt{r^2\mathrm{Cos}^2n + 2rr'\,\mathrm{Cos}n\,\mathrm{Cos}n'\,\mathrm{Cos}(m'-m) + r'^2\mathrm{Cos}^2n'}} \end{aligned}\right\} \quad (28).$$

Här är azimutbågen, som representeras af arctg $\frac{Y}{X}$, liksom planvinkeln i (15) och (16), fullt bestämd genom täljarens och nämnarens tecken i bråket $\frac{Y}{X}$. Gränsvärdena för arctg $\frac{Y}{X}$ innefatta således mellan sig alla fyra qvadranterna eller hela omkretsen 2π. För att en geometrisk qvantitet

$$(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{1}{2}}_{\text{arctg}\,\frac{Y}{X}\,+\,\left(\text{arctg}\,\frac{Z}{\pm\sqrt{X^2+Y^2}}\right)\frac{\omega}{2}}$$

skall kunna bestämma hvilken punkt som helst i rummet är det derföre fullt tillräckligt, att arctg $\frac{Z}{\pm\sqrt{X^2+Y^2}}$ innefattas mellan gränserna af 2:ne qvadranter, antingen den 1:ta och 4:de eller den 2:dra och 3:dje. Vi se att dessa tvenne fall motsvaras: det förra af den positiva roten, det sednare af den negativa roten i arctg $\frac{Z}{\pm\sqrt{X^2+Y^2}}$. Vi ega derföre här liksom i (15) och (16) att använda endast endera af rötterna. Genom konstruktion finna vi med lätthet, att om vi räkna vår azimutbåge arctg $\frac{Y}{X}$ från 0 till 2π, så ega vi att använda den positiva roten; räkna vi honom deremot från π till 3π, så ega vi att använda den negativa roten. Likhet i betydelse af dessa tvenne fall uttrycka vi, såsom i (17), medelst likheten:

$$(\quad)^{\frac{1}{2}}_{\text{arctg}\,\frac{Y}{X}\,+\,\pi\,+\,\left(\text{arctg}\,\frac{Z}{\mp\sqrt{\quad}}\right)\frac{\omega}{2}} = (\quad)^{\frac{1}{2}}_{\text{arctg}\,\frac{Y}{X}\,+\,\left(\text{arctg}\,\frac{Z}{\pm\sqrt{\quad}}\right)\frac{\omega}{2}} \quad \ldots (29).$$

I öfverensstämmelse med satserna 7 och 8 inskränka vi icke höjdbågen hos en på detta sätt tecknad geometrisk qvantitet inom gränserna af tvenne qvadranter, utan låta honom representera hvilket värde som helst inom hela omkretsen 2π. Den i (24) införda nya beteckningen på en till nytt plan reducerad geometrisk qvantitet framstår derföre äfven här såsom det generella uttrycket för begge ofvan anförda fall.

Följdsatser:

I. Är i (28) $m_{,} = m$, så följer deraf:

$$r_{m+n\frac{\omega}{2}} + r'_{m+n'\frac{\omega}{2}}$$

$$= \left(r^2 + 2rr'\,\text{Cos}\,(n'-n) + r'^2\right)^{\frac{1}{2}}_{m+\left(\text{arctg}\,\frac{r\,\text{Sin}\,n\,+\,r'\,\text{Sin}\,n'}{r\,\text{Cos}\,n\,+\,r'\,\text{Cos}\,n'}\right)\frac{\omega}{2}} \quad \ldots (30)$$

d. v. s. *geometriska qvantiteter, som hafva lika azimutbågar, summeras enligt N:o 7 i deras gemensamma vertikalplan.*

Af (30) härleda vi:

$$\left.\begin{aligned} r_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} + r'_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} &= (r+r')_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} \\ r_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} + r'_{m+(\pi+n)_{\frac{\omega}{2}}} &= (r-r')_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (31)$$

d. v. s. *qvantiteter, som hafva lika azimutbågar och lika eller på 180° sig skiljande höjdbågar kunna direkt adderas till eller subtraheras på hvarandra.*

II. Är $m' - m = \pi$, så följer deraf:

$$r_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} + r'_{(m+\pi)+n'_{\frac{\omega}{2}}}$$

$$= (r^2 + 2rr' \operatorname{Cos}(n'+n) + r'^2)^{\frac{1}{2}}{}_{m + \left(\operatorname{arctg} \frac{r \operatorname{Sin} n + r' \operatorname{Sin} n'}{r \operatorname{Cos} n - r' \operatorname{Cos} n'}\right)_{\frac{\omega}{2}}} \quad \ldots \quad (32)$$

d. v. s. *geometriska qvantiteter, hvilkas azimutbågar skilja sig på 180°, summeras i sitt gemensamma vertikalplan med de särskilda vilkor, som äro uppgifna i (32).*

Af (32) härleda vi:

$$\left.\begin{aligned} r_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} + r'_{(m+\pi)+(\pi-n)_{\frac{\omega}{2}}} &= (r+r')_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} \\ r_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} + r'_{(m+\pi)+(-n)_{\frac{\omega}{2}}} &= (r-r')_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (33)$$

d. v. s. *qvantiteter, hvilkas azimutbågar skilja sig på 180° och hvilkas höjdbågar satisfiera de vilkor, som äro gifna i (33), kunna direkt adderas till eller subtraheras från hvarandra.*

På grund af (33) kunna vi nu ytterligare bestyrka riktigheten af (29); ty:

$$r_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} = r_{m+\pi+\left(\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Sin}(\pi-n)}{\operatorname{Cos}(\pi-n)}\right)_{\frac{\omega}{2}}} = r_{m+\pi+\left(\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Sin} n}{-\operatorname{Cos} n}\right)_{\frac{\omega}{2}}} \quad \ldots \quad (34),$$

der nämnaren i arctg $\frac{\text{Sin}\, n}{-\text{Cos}\, n}$ är ovilkorligen negativ, så snart n icke öfverskrider värdet $\pm\frac{\pi}{2}$.

Slutligen få vi uttala trenne mot (14), (15) och (16) af N:o 2 svarande satser, hvilkas riktighet omedelbart inses på grund af nämde satser samt (14):

9. Likheten $(r_p)_t = (r'_{p_{\prime}})_{t_{\prime}}$ kan icke ega rum, utan att särskildt:

$$\left.\begin{aligned} r &= r' \\ p &= p_{\prime} \\ t &= t_{\prime} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (35).$$

Att dessutom azimut- och höjdbågarna måste vara lika inses omedelbart af (22).

10. Likheten $(r_p)_t = x + y_{\frac{\pi}{2}} + (z_{\frac{\pi}{2}})_{\frac{\omega}{2}} = 0$ kan icke ega rum, utan att särskildt:

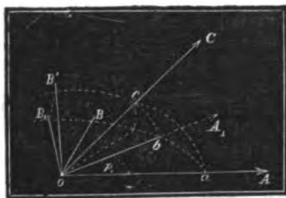
$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (36).$$

11. Om $(r_p)_t = x + y_{\frac{\pi}{2}} + (z_{\frac{\pi}{2}})_{\frac{\omega}{2}}$ samt $(r'_{p_{\prime}})_{t_{\prime}} = x_{\prime} + y_{\prime\frac{\pi}{2}} + (z_{\prime\frac{\pi}{2}})_{\frac{\omega'}{2}}$, så kan icke likheten $(r_p)_t = (r'_{p_{\prime}})_{t_{\prime}}$ ega rum, utan att särskildt:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_{\prime} \\ y &= y_{\prime} \\ z &= z_{\prime} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (37).$$

11.

Geometriska qvantiteters reduktion till ny grundriktning på samma gång som till nytt plan.



Om vi med en geometrisk qvantitet r_p fixera en punkt C i planet $o\,A, C$, så teckna vi honom enligt föregående, såsom reducerad till det nya planet $o\,A,\ B_{,}$, $(r_p)_t$, då nämligen t = vinkeln $B'\,o\,B$, utgör hans planvinkel och $o\,A$, utgör hans grundriktning (planens skärningslinea). Vilja vi nu reducera honom till en ny grundriktning $o\,A$ i hans nya plan, så finna vi enligt N:o 3, då längden $ob = oa = 1$ utgör hans enhet och p, enhetens ob riktning från $o\,A$, $1_{p,}\,.\,(r_p)_t$, såsom representerande qvantiteten r_p:s reduktion först till ett nytt plan och sedan till en ny grundriktning i detta plan. Vi säga nu, *att vi reducerat en geometrisk qvantitet r_p till ny grundriktning på samma gång som till nytt plan.*

Låta vi en geometrisk qvantitet $(R_P)_T$, hänförd till samma grundbestämningar som $1_{p,}\,.\,(r_p)_t$, nämligen origo o, enheten $o\,a$, grundriktningen $o\,A$ och planet $o\,A\,B$, fixera samma punkt C, så ha vi enligt N:o 1 likheten:

$$(R_P)_T = 1_{p,}\,.\,(r_p)_t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

P representerar här bågen ac och T vinkeln mellan planen $o\,A\,C$ och $o\,A\,B$. R är $= r$, emedan tvenne räta linier, dragna mellan tvenne punkter o och C, måste helt och hållet sammanfalla. Bågarna P, p, och p utgöra, som vi se, sidor i den sferiska triangeln abc. Med stöd af satserna 3—6 af N:o 10 kunna vi nu sönderlägga geometriska qvantiteten $1_{p,}\,.\,(r_p)_t$ i hans projektioner. Vi finna nämligen:

$$1_{p,} \cdot (r_p)_t = 1_{p,} \cdot \left\{ r \operatorname{Cos} p + \operatorname{Sin} p_{\frac{\pi}{2}} \right\}_t$$

$$= 1_{p,} \cdot \left\{ r \operatorname{Cos} p + r \operatorname{Sin} p_{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{Cos} t + \operatorname{Sin} t_{\frac{\omega}{2}} \right) \right\}$$

$$= r \operatorname{Cos} p \,.\, 1_{p,} + r \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} t \,.\, 1_{p,+\frac{\pi}{2}} + \left(r \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} t_{\frac{\pi}{2}} \right)_{\frac{\omega}{2}}$$

$$= r \operatorname{Cos} p \operatorname{Cos} p, + r \operatorname{Cos} p \operatorname{Sin} p_{,\frac{\pi}{2}} - r \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} t \operatorname{Sin} p,$$

$$+ r \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} t \operatorname{Cos} p_{,\frac{\pi}{2}} + \left(r \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} t_{\frac{\pi}{2}} \right)_{\frac{\omega}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Om vi nu tillika sönderlägga $(R_P)_T$, så erhålla vi på grund af N:o 10 (37):

$$\left.\begin{aligned} R \operatorname{Cos} P &= r \operatorname{Cos} p \operatorname{Cos} p, - r \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} t \operatorname{Sin} p, \\ R \operatorname{Sin} P \operatorname{Cos} T &= r \operatorname{Cos} p \operatorname{Sin} p, + r \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} t \operatorname{Cos} p, \\ R \operatorname{Sin} P \operatorname{Sin} T &= r \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} t \end{aligned}\right\} \ldots (3).$$

Om vi i (3) sätta $R = r = 1$ eller helt enkelt på grund af R och r:s likhet dividera bort dem, samt i stället för t insätta $\pi - \alpha$, så erhålla vi tre af den sferiska trigonometriens grundformler.

Följdsatser:

I. I enlighet med N:o 4 finna vi här såsom uttryck på en geometrisk summas reduktion till ny grundriktning i grundplanet:

$$1_\varphi \cdot \left\{ (r_p)_t + (r'_{p,})_{t,} \right\} = 1_\varphi \cdot (r_p)_t + 1_\varphi \cdot (r'_{p,})_{t,} \quad \ldots (4).$$

Detta gäller tydligen för huru många summander som helst, hvad form de än må ha.

II. Vi kunna nu på grund af (1) ur en ny synpunkt skärskåda den i N:o 10 (24) införda nya beteckning på en till nytt plan reducerad geometrisk qvantitet. Vi se nämligen, att

$$r_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} = 1_m \cdot (r_n)_{\frac{\omega}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

eller annorlunda uttryckt

$$\left(r_p\right)_t = r_{az(p,t)+cz(p,t)_{\frac{\omega}{2}}} = 1_{az(p,t)}\cdot\left(r_{cz(p,t)}\right)_{\frac{\omega}{2}}\;\ldots\;(6).$$

Af (5) följer:

$$1_{p,}\cdot\left(r_p\right)_t = 1_{p,+az(p,t)}\cdot\left(r_{cz(p,t)}\right)_{\frac{\omega}{2}} = r_{p,+az(p,t)+cz(p,t)_{\frac{\omega}{2}}}\;\ldots\;(7)$$

samt vidare på grund af (1) och satsen 9 af N:o 10:

$$\left.\begin{aligned} az\,(P,T) &= p_, + az\,(p,t)\\ cz\,(P,T) &= cz\,(p,t)\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\;(8).$$

På grund af (5) samt med stöd af (4) och N:o 10 (3) finna vi i öfverensstämmelse med N:o 10 (30) och (31):

$$r_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} + r'_{m+n'_{\frac{\omega}{2}}} = 1_m\cdot\left(r_n\right)_{\frac{\omega}{2}} + 1_m\cdot\left(r'_{n'}\right)_{\frac{\omega}{2}} = 1_m\cdot\left\{r_n + r'_{n'}\right\}_{\frac{\omega}{2}} = \text{etc.}\ldots(9),$$

då således:

$$\left.\begin{aligned} r_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} + r'_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} &= 1_m\cdot\left\{\left(r+r'\right)_n\right\}_{\frac{\omega}{2}}\\ r_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} + r'_{m+(n+\pi)_{\frac{\omega}{2}}} &= 1_m\cdot\left\{\left(r-r'\right)_n\right\}_{\frac{\omega}{2}}\end{aligned}\right\}\;\ldots\;(10).$$

Vidare finna vi i öfverensstämmelse med N:o 10 (32) och (33):

$$r_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} + r'_{m+\pi+n'_{\frac{\omega}{2}}} = 1_m\cdot\left\{\left(r_n\right)_{\frac{\omega}{2}} + 1_\pi\cdot\left(r'_{n'}\right)_{\frac{\omega}{2}}\right\};$$

men enligt (3) är

$$1_\pi\cdot\left(r'_{n,}\right)_{\frac{\omega}{2}} = 1_\pi\,.\,r'\,\text{Cos}\,n' + \left(r'\,\text{Sin}\,n'_{\frac{\pi}{2}}\right)_{\frac{\omega}{2}}$$

$$= r'\,\text{Cos}\,(\pi-n') + \left(r'\,\text{Sin}\,(\pi-n')_{\frac{\pi}{2}}\right)_{\frac{\omega}{2}} = \left(r'_{\pi-n'}\right)_{\frac{\omega}{2}},$$

hvaraf följer:

$$r_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} + r'_{m+\pi+n'_{\frac{\omega}{2}}} = 1_m\cdot\left\{r_n + r'_{\pi-n'}\right\}_{\frac{\omega}{2}} = \text{etc.}\ldots(11),$$

då således:

$$\left.\begin{array}{l} r_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} + r'_{m+\pi+(\pi-n)_{\frac{\omega}{2}}} = 1_m \cdot \left\{\left(r + r'\right)_n\right\}_{\frac{\omega}{2}} \\ r_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} + r'_{m+\pi+(-n)_{\frac{\omega}{2}}} = 1_m \cdot \left\{\left(r - r'\right)_n\right\}_{\frac{\omega}{2}} \end{array}\right\} \ldots (12).$$

Är i (10) och (12) $n = k\pi$, så försvinner enligt N:o 10 (4) $\frac{\omega}{2}$ och $k\pi$ öfvergår såsom addend till m

III. På grund af N:o 10 samt (1) af detta N:o kunna vi ytterligare reducera en geometrisk qvantitet $1_{p,} \cdot (r_p)_t$ till ett nytt plan, förmedelst planvinkeln $t_,$, hvaraf erhålles

$$\left[1_{p,} \cdot (r_p)_t\right]_{t,};$$

vidare denna qvantitet till ny grundriktning i detta nya plan förme delst vinkeln $p_{,,}$, hvaraf erhålles

$$1_{p,,} \cdot \left[1_{p,} \cdot (r_p)_t\right]_{t,}.$$

Vi kunna verkställa dylika reduktioner till nytt plan och till ny grund riktning i detta plan upprepade gånger, då vi få såsom resultatet af den n:te i ordningen å ömse sidor:

$$1_{p_{(n)}} \cdot \left[\ldots\, 1_{p_{,,,}} \cdot \left\{1_{p_{,,}} \cdot \left(1_{p,} \cdot (r_p)_t\right)_{t,}\right\}_{t_{,,}} \ldots\right]_{t_{n-1}}.$$

Med stöd af N:o 4 samt satserna 3—6 af N:o 10 kunna vi med upprepande af samma räkningar, som vi använde för erhållande af (3), sönderlägga en qvantitet, underkastad dylika reduktioner, huru många de än må vara.

Om vi sätta:

$$(r_p)_t = A + B_{\frac{\pi}{2}} + (C_{\frac{\pi}{2}})_{\frac{\omega}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

samt med v utmärka en 90°:s båge, således till gradtalet lika med $\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\omega}{2}$, så erhålla vi:

$$1_{p_,}\cdot(r_p)_t = 1_{p_,}\cdot\left\{A + B_{\frac{\pi}{2}} + (C_{\frac{\pi}{2}})_{\frac{\omega}{2}}\right\}$$

$$= A \operatorname{Cos} p_, + B \operatorname{Cos}(v + p_,) + \left[A \operatorname{Sin} p_, + B \operatorname{Sin}(v + p_,)\right]_{\frac{\pi}{2}} + (C_{\frac{\pi}{2}})_{\frac{\omega}{2}}.$$

Vi sätta:

$$\left.\begin{aligned} A^1 &= A \operatorname{Cos} p_, + B \operatorname{Cos}(v + p_,) \\ B^1 &= A \operatorname{Sin} p_, + B \operatorname{Sin}(v + p_,) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (14),$$

hvaraf följer:

$$\left[1_{p_,}\cdot(r_p)_t\right]_{t_,} = A^1 + \left[B^1 \operatorname{Cos} t_, + C \operatorname{Cos}(v + t_,)\right]_{\frac{\pi}{2}}$$

$$+ \left\{\left[B^1 \operatorname{Sin} t_, + C \operatorname{Sin}(v + t_,)\right]_{\frac{\pi}{2}}\right\}_{\frac{\omega}{2}}.$$

Vi sätta:

$$\left.\begin{aligned} B_1^1 &= B^1 \operatorname{Cos} t_, + C \operatorname{Cos}(v + t_,) \\ C_1 &= B^1 \operatorname{Sin} t_, + C \operatorname{Sin}(v + t_,) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15),$$

hvaraf följer:

$$1_{p_{,,}}\cdot\left[1_{p_,}\cdot(r_p)_t\right]_{t_,} = A^1 \operatorname{Cos} p_{,,} + B_1^1 \operatorname{Cos}(v + p_{,,})$$

$$+ \left[A^1 \operatorname{Sin} p_{,,} + B_1^1 \operatorname{Sin}(v + p_{,,})\right]_{\frac{\pi}{2}} + (C_{1_{\frac{\pi}{2}}})_{\frac{\omega}{2}}.$$

Vi sätta:

$$\left.\begin{aligned} A^{11} &= A^1 \operatorname{Cos} p_{,,} + B_1^1 \operatorname{Cos}(v + p_{,,}) \\ B_1^{11} &= A^1 \operatorname{Sin} p_{,,} + B_1^1 \operatorname{Sin}(v + p_{,,}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (16),$$

hvaraf följer:

$$\left\{1_{p_{,,}}\cdot\left[1_{p_,}\cdot(r_p)_t\right]_{t_,}\right\}_{t_{,,}} = A^{11} + \left[B_1^{11} \operatorname{Cos} t_{,,} + C_1 \operatorname{Cos}(v + t_{,,})\right]_{\frac{\pi}{2}}$$

$$+ \left\{\left[B_1^{11} \operatorname{Sin} t_{,,} + C_1 \operatorname{Sin}(v + t_{,,})\right]_{\frac{\pi}{2}}\right\}_{\frac{\omega}{2}},$$

då vi ytterligare sätta:

$$\left.\begin{aligned} B_{11}^{11} &= B_1^{11} \operatorname{Cos} t_{,,} + C_1 \operatorname{Cos}(v + t_{,,}) \\ C_{11} &= B_1^{11} \operatorname{Sin} t_{,,} + C_1 \operatorname{Sin}(v + t_{,,}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (17).$$

Lagen är tydlig för huru många reduktioner som helst, så att vi i allmänhet erhålla:

$$1_{p_n}\cdot\left[\cdots\, 1_{p_{\prime\prime}}\cdot\left[1_{p_\prime}\cdot(r_p)_t\right]_{t_\prime}\cdots\right]_{t_{n-1}}$$

$$= A^{(n)} + B^{(n)}_{(n-1)_{\frac{\pi}{2}}} + \left(C_{(n-1)_{\frac{\pi}{2}}}\right)_{\frac{\omega}{2}}$$

$$= A^{(n-1)}\,\mathrm{Cos}\,p_n + B^{(n-1)}_{(n-1)}\,\mathrm{Cos}\,(v+p_n)$$

$$+ \left[A^{(n-1)}\,\mathrm{Sin}\,p_n + B^{(n-1)}_{(n-1)}\,\mathrm{Sin}\,(v+p_n)\right]_{\frac{\pi}{2}} + \left(C_{(n-1)_{\frac{\pi}{2}}}\right)_{\frac{\omega}{2}} \ldots (18)$$

samt:

$$\left\{1_{p_n}\cdot\left[\cdots\, 1_{p_{\prime\prime}}\cdot\left[1_{p_\prime}(r_p)_t\right]_{t_\prime}\cdots\right]_{t_{n-1}}\right\}_{t_n} = A^{(n)} + B^{(n)}_{(n)_{\frac{\pi}{2}}} + \left(C_{(n)_{\frac{\pi}{2}}}\right)_{\frac{\omega}{2}}$$

$$= \left[A^{(n)} + \left(B^{(n)}_{(n-1)}\,\mathrm{Cos}\,t_n + C_{(n-1)}\,\mathrm{Cos}\,(v+t_n)\right)\right]_{\frac{\pi}{2}}$$

$$+ \left\{\left[B^{(n)}_{(n-1)}\,\mathrm{Sin}\,t_n + C_{(n-1)}\,\mathrm{Sin}\,(v+t_n)\right]_{\frac{\pi}{2}}\right\}_{\frac{\omega}{2}} \;\ldots\ldots\; (19),$$

hvaraf erhålles såsom ett allmänt reduktions-schema:

$$\left.\begin{array}{ll} A^{(n)} & = A^{(n-1)}\,\mathrm{Cos}\,p_n + B^{(n-1)}_{(n-1)}\,\mathrm{Cos}\,(v+p_n) \\ B^{(n)}_{(n-1)} & = A^{(n-1)}\,\mathrm{Sin}\,p_n + B^{(n-1)}_{(n-1)}\,\mathrm{Sin}\,(v+p_n) \\ B^{(n)}_{(n)} & = B^{(n)}_{(n-1)}\,\mathrm{Cos}\,t_n + C_{(n-1)}\,\mathrm{Cos}\,(v+t_n) \\ C_{(n)} & = B^{(n)}_{(n-1)}\,\mathrm{Sin}\,t_n + C_{(n-1)}\,\mathrm{Sin}\,(v+t_n) \end{array}\right\} \ldots (20).$$

Enligt detta schema kunna (14) och (15) äfven skrifvas:

$$\left.\begin{array}{ll} A^1 & = A^0\,\mathrm{Cos}\,p_\prime + B^0_0\,\mathrm{Cos}\,(v+p_\prime) \\ B^1_0 & = A^0\,\mathrm{Sin}\,p_\prime + B^0_0\,\mathrm{Sin}\,(v+p_\prime) \\ B^1_1 & = B^1_0\,\mathrm{Cos}\,t_\prime + C_0\,\mathrm{Cos}\,(v+p_\prime) \\ C_1 & = B^1_0\,\mathrm{Sin}\,t_\prime + C_0\,\mathrm{Sin}\,(v+t_\prime) \end{array}\right\} \ldots (21)$$

Låta vi en geometrisk qvantitet $(R_P)_T$ fixera samma punkt samt vara hänförd till samma grundbestämningar som det reducerade $(r_p)_t$ i (18) och (19) och om vi sätta:

$$(R_P)_T = X + Y_{\frac{\pi}{2}} + \left(Z_{\frac{\pi}{2}}\right)_{\frac{\omega}{2}},$$

så erhåtla vi med stöd af N:o 10 (37), i förra fallet:

$$\left.\begin{aligned} X &= A^{(n)} \\ Y &= B^{(n)}_{(n-1)} \\ Z &= C_{(n-1)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

samt i sednare fallet:

$$\left.\begin{aligned} X &= A^{(n)} \\ Y &= B^{(n)}_{(n)} \\ Z &= C_{(n)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23).$$

Om vi såsom exempel utföra de reduktioner, som äro tecknade i

$$1_{p_{,,}} \cdot \left[1_{p_{,}} \cdot (r_p)_{t}\right]_{t_{,}},$$

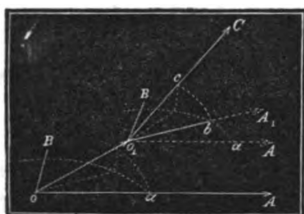
så erhålla vi enligt (20) och (22):

$$\left.\begin{aligned} X = A^{\prime\prime} &= A^{\prime}\operatorname{Cos}p_{,,} + B^{\prime}_{1}\operatorname{Cos}(v+p_{,,}) = [A\operatorname{Cos}p_{,} + B\operatorname{Cos}(v+p_{,})]\operatorname{Cos}p_{,,} \\ &\quad + [B^{\prime}\operatorname{Cos}t_{,} + C\operatorname{Cos}(v+t_{,})]\operatorname{Cos}(v+p_{,,}) \\ &= [A\operatorname{Cos}p_{,} + B\operatorname{Cos}(v+p_{,})]\operatorname{Cos}p_{,,} + [(A\operatorname{Sin}p_{,} + B\operatorname{Sin}(v+p_{,}))\operatorname{Cos}t_{,} \\ &\quad + C\operatorname{Cos}(v+t_{,})]\operatorname{Cos}(v+p_{,,}) \\ Y = B^{\prime\prime}_{1} &= A^{\prime}\operatorname{Sin}p_{,,} + B^{\prime}_{1}\operatorname{Sin}(v+p_{,,}) = [A\operatorname{Cos}p_{,} + B\operatorname{Cos}\,v+p_{,})]\operatorname{Sin}p_{,,} \\ &\quad + [B^{\prime}\operatorname{Cos}t_{,} + C\operatorname{Cos}(v+t_{,})]\operatorname{Sin}(v+p_{,,}) \\ &= [A\operatorname{Cos}p_{,} + B\operatorname{Cos}(v+p_{,})]\operatorname{Sin}p_{,,} + [(A\operatorname{Sin}p_{,} + B\operatorname{Sin}(v+p_{,}))\operatorname{Cos}t_{,} \\ &\quad + C\operatorname{Cos}(v+t_{,})]\operatorname{Sin}(v+p_{,,}) \\ Z = C_{1} &= B^{\prime}\operatorname{Sin}t_{,} + C\operatorname{Sin}(v+t_{,}) = [A\operatorname{Sin}p_{,} + B\operatorname{Sin}(v+p_{,})]\operatorname{Sin}t_{,} \\ &\quad + C\operatorname{Sin}(v+t_{,}) \end{aligned}\right\} \ldots (24).$$

Om vi i (24) i stället för A, B och C insätta x, y och z samt enligt N:o 6 (6) i stället för $\operatorname{Cos}(v+p_{,})$, $\operatorname{Sin}(v+p_{,})$ o. s. v. insätta deras värden $-\operatorname{Sin}p_{,}$, $+\operatorname{Cos}p_{,}$ o. s. v., så återfinna vi i dessa formler de *Eulerska koordinaterna.*

12.

Geometriska qvantiteters reduktion till nytt origo på samma gång som till nytt plan och ny grundriktning.



Om vi ha en punkt C i planet $o_, A, C$, hänförd till ett origo $o_,$, en enhet $o_, b = o_, a$ och en grundriktning $o_, A_,$, så representera vi honom enligt N:o 11 såsom hänförd till planet $o\, A, B$ och grundriktningen o, A medelst den reducerade geometriska qvantiteten $1_{p_,} \cdot (r_p)_t$, då t utgör hans planvinkel och $p_,$ representerar riktningen $o_, A_,$, räknad från den nya grundriktningen $o_, A$. Vilja vi ha samma punkt C hänförd till ett nytt origo o, i förhållande till hvilket äfvensom till de nya grundbestämningarna planet $o\,A\,B$, parallelt med planet $o_, A\, B$, och grundriktningen $o\,A$, parallel med prundriktningen $o_, A$, samt enheten $o\,a = o_, a = 1$, origo $o_,$ fixeras af en geometrisk qvantitet $(\varrho_\varphi)_\vartheta$, så representeras punkten C af geometriska summan $(\varrho_\varphi)_\vartheta + 1_p \cdot (r_p)_t$. Låta vi dertill C fixeras af en geometrisk qvantitet $(R_P)_T$, hänförd till samma grundbestämningar som nyssnämnda summa, så erhålla vi i öfverensstämmelse med N:o 5 geometriska likheten:

$$(R_P)_T = (\varrho_\varphi)_\vartheta + 1_{p_,} \cdot (r_p)_t. \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Vi säga nu, *att vi reducerat en geometrisk qvantitet* r_p *till nytt origo på samma gång som till nytt plan och ny grundriktning.*

Anm. I enlighet med N:o 5 benämna vi äfven här $(\varrho_\varphi)_\vartheta$ *reduktionsqvantitet till nytt origo.* Denna reduktions-qvantitet framstår äfven här i form af summand och måste tydligen vara hänförd till samma enhet, grundriktning och plan som den eller de öfriga summanderna i summan.

Följdsatser:

I. Med stöd af N:o 10 (3) samt N:o 11 (4) kunna vi på den geometriska summan i (1) utföra huru många plan- och grundriktningsreduktioner som helst. Så finna vi:

$$\left.\begin{aligned} \left\{(\varrho_\varphi)_\theta + 1_{p_\prime}\cdot(r_p)_t\right\}_{t_\prime} &= (\varrho_\varphi)_{\theta+t_\prime} + \left(1_{p_\prime}\cdot(r_p)_t\right)_{t_\prime} \\ 1_{p_{\prime\prime}}\cdot\left\{(\varrho_\varphi)_\theta + 1_{p_\prime}\cdot(r_p)_t\right\} &= 1_{p_{\prime\prime}}\cdot(\varrho_\varphi)_\theta + 1_{p_{\prime\prime}+p_\prime}\cdot(r_p)_t \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2).$$

Lagen gäller tydligen för huru många summander som helst, hvilken form de än må ha.

II. Vi kunna vidare underkasta geometriska summan i (1) en reduktion till nytt origo efter att ha tillämpat satserna (2), då vi erhålla en ny geometrisk summa, på hvilken vi vidare kunna tillämpa (2). Den då erhållna geometriska summan kunna vi ytterligare reducera till ett nytt origo, på den då uppkomna summan tillämpa (2) o. s. v. huru långt vi behaga. Vi förbigå att utföra dessa reduktioner såsom lemnande ett nästan obegränsadt antal formler.

III. På grund af N:o 1 ax. 3 samt i enlighet med N:o 3 X och N:o 5 IV kunna vi nu på en geometrisk likhet verkställa hvilka reduktioner som helst till ny enhet, ny grundriktning, nytt origo och nytt plan. Med ihogkommande af N:o 10 (19), (21), (31) och (33), att nämligen en geometrisk summa i allmänhet:

$$\left.\begin{aligned} (r_p)_t + (r_{p+\pi})_t &= 0 \\ (r_p)_t + (r_{-(p+\pi)})_{t+\omega} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

äfvensom

$$\left.\begin{aligned} r_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} + r_{m+(n+\pi)_{\frac{\omega}{2}}} &= 0 \\ r_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} + r_{m+\pi+(-n)_{\frac{\omega}{2}}} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4),$$

kunna vi t. ex. bringa (1) till formen:

$$1_{-p_\prime}\cdot\left\{(R_P)_T + (\varrho_{\varphi+\pi})_\theta\right\} = (r_p)_t \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

hvilket innebär en öfvergång från $(R_P)_T$:s till $(r_p)_t$:s grundbestämningar. På samma sätt kunna vi uti en likhet öfvergå från en geometrisk qvantitets till en annan geometrisk qvantitets grundbestämningar och i allmänhet till hvilka nya grundbestämningar som helst. Såsom ett fullständigare exempel än (1) anföra vi:

$$R_{M+N_{\frac{\omega}{2}}} = \varrho'_{\varphi,} + \left[\varrho_{\theta+\varphi_{\frac{\omega}{2}}} + 1_{p,}\cdot\left(r_{m+n_{\frac{\omega}{2}}}\right)_t\right]_{t,} \quad \ldots \quad (6),$$

hvilken likhet vi kunna bringa till formen:

$$\left\{1_{-p,}\cdot\left[\left(R_{M+N_{\frac{\omega}{2}}} + \varrho'_{\varphi,+\pi}\right)_{-t,} + \varrho_{\theta+(\varphi+\pi)_{\frac{\omega}{2}}}\right]\right\}_{-t} = r_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} \quad \ldots \quad (7).$$

Med användande af (2) kunna vi i stället för (7) sätta:

$$\left[1_{-p,}\cdot\left(R_{M+N_{\frac{\omega}{2}}}\right)_{-t,}\right]_{-t} + \left[1_{-p}\cdot\left(\varrho'_{\varphi,+\pi}\right)_{-t,}\right]_{-t}$$

$$+ \left(\varrho_{\theta-p,+(\varphi+\pi)_{\frac{\omega}{2}}}\right)_{-t} = r_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} \quad \ldots \quad (8),$$

hvarigenom vi således öfvergått från $R_{M+N_{\frac{\omega}{2}}}$:s till $r_{m+n_{\frac{\omega}{2}}}$:s grundbestämningar. Vi skola framdeles i N:o 13 genom exempel närmare belysa betydelsen af (6) äfvensom af dess förändrade form i (7) och (8).

IV. Emedan hvarje reduktion till nytt plan och ny grundriktning, verkställd på en geometrisk qvantitet, som är = 0, icke kan göra honom till annat än = 0, så finna vi med stöd af N:o 2 II samt N:o 12 (2):

$$\left(r_p + r_{p+\pi}\right)_t = \left(r_p\right)_t + \left(r_{p+\pi}\right)_t = 0$$

$$1_{p,}\cdot\left(r_p + r_{p+\pi}\right)_t = 1_{p,}\cdot\left(r_p\right)_t + 1_{p,}\cdot\left(r_{p+\pi}\right)_t = 0$$

och såsom ett enskildt fall af den sednare likheten:

$$1_m\cdot\left(r_n + r_{n+\pi}\right)_{\frac{\omega}{2}} = r_{m+n_{\frac{\omega}{2}}} + r_{m+(n+\pi)_{\frac{\omega}{2}}} = 0,$$

hvilka likheter bestyrka riktigheten af N:o 10 (19) och (31).

I allmänhet erhålla vi således:

$$\left.\begin{aligned} & 1_{p_n}\cdot\Big[\cdots 1_{p_{,,}}\cdot\Big\{1_{p_,}\cdot\big(r_{p+\pi}\big)_t\Big\}_{t_,}\cdots\Big]_{t_{n-1}} \\ & = -1_{p_n}\cdot\Big[\cdots 1_{p_{,,}}\cdot\Big\{1_{p_,}\big(r_p\big)_t\Big\}_{t_,}\cdots\Big]_{t_{n-1}} \\ \text{samt}\quad & 1_{p_n}\cdot\Big[\cdots 1_{p_{,,}}\cdot\Big\{1_{p_,}\cdot\big(r_{m+(n+\pi)_{\underset{2}{\omega}}}\big)_t\Big\}_{t_,}\cdots\Big]_{t_{n-1}} \\ & = -1_{p_n}\cdot\Big[\cdots 1_{p_{,,}}\cdot\Big\{1_{p_,}\cdot\big(r_{m+n_{\underset{2}{\omega}}}\big)_t\Big\}_{t_,}\cdots\Big]_{t_{n-1}} \end{aligned}\right\}\;\ldots\;(9)$$

Vi kunna tydligen på samma grunder erhålla liknande formler för de sednare likheterna af (3) och (4).

På grund af (9) kunna vi bringa (6) till formen:

$$R_{M+N_{\underset{2}{\omega}}} + \varrho'_{\varphi,+\pi} + \big(\varrho_{\theta+(\varphi+\pi)_{\underset{2}{\omega}}}\big)_{t_,} = \Big\{1_{p_,}\cdot\big(r_{m+n_{\underset{2}{\omega}}}\big)_t\Big\}_{t_,} \;\ldots\;(10),$$

hvilket innebär en öfvergång från $R_{M+N_{\underset{2}{\omega}}}$:s till $r_{m+n_{\underset{2}{\omega}}}$:s origo med bibehållande föröfrigt af $R_{M+N_{\underset{2}{\omega}}}$:s såväl grund- som planriktning.

V. Med stöd af de räknelagar vi i dessa N:is 10—12 utvecklat kunna vi öfvertyga oss om allmängiltigheten af den i N:o 1 framhållna satsen, att nämligen de räknelagar, som äro bevisade sanna för qvantiteter i ett plan i allmänhet, kunna sedan tillämpas på qvantiteter i hvilket bestämdt plan som helst. Således kunna vi t. ex. uttrycka de plana kurvor vi i N:o 9 afhandlat såsom hänförda till hvilket nytt plan som helst; och i allmänhet kunna vi uttrycka hvarje plan kurva såsom hänförd till hvilket nytt plan, nytt origo och ny grundriktning som helst.

Slutligen få vi anmärka trenne för våra reduktioner särdeles vigtiga satser, af hvilka de tvenne första utgöra satserna 1 och 2 af N:o 5, uttalade i en mer omfattande form, samt den tredje är en omedelbar följd af N:o 11.

1. *Sättet huru vi räkna våra positiva riktningar i grundplanet samt positiva bågar såväl i grundplanet som vertikalplanet kan, såsom beroende af fastställelsen af våra grundbestämningar, vara hvilket som helst, blott det är ett och detsamma under hela loppet af en företagen räkning.*

2. *Vid våra reduktioner till nya grundbestämningar räkna vi våra riktningar och bågar såväl i grundplanet som vertikalplanet från de nya grundbestämningarna till de gamla och icke tvärtom.*

3. *En geometrisk qvantitets reduktion till nytt plan kan icke verkställas, innan qvantiteten förut blifvit reducerad till den positiva riktningen af planens skärningslinea.*

Anm. Alla enhetsreduktioner samtidigt med reduktioner till nytt plan, ny grundriktning i det nya planet och nytt origo underlåta vi såsom ledande till alltför vidlyftiga formler. I föregående N:is 10—12 äfvensom i de geometriska tillämpningar, till hvilka vi nu öfvergå, förutsätta vi derföre enheten öfverallt vara densamma.

13.

Den analytiska method, som blifvit antydd i N:o 9, gå vi ytterligare att tillämpa på våra geometriska qvantiteter, såsom underkastade de i N:is 10—12 afhandlade reduktioner.

Om vi tänka oss en funktion $F\left[\left(r_p\right)_t\right]$ af $\left(r_p\right)_t$, så har den äfven här blott så till vida för oss betydelse, som den enligt föregående räkningar kan uppvisas såsom fixerande en punkt i rymden, då vi följaktligen på grund af N:o 10 satserna 7 och 8 kunna sätta:

$$\left(R_P\right)_T = F\left[\left(r_p\right)_t\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Vi kunna enligt N:o 10 bringa $F\left[\left(r_p\right)_t\right]$ till formen:

$$\left\{\Phi\left(r, p, t\right)_{\Phi_1(r,p,t)}\right\}_{\Phi_{11}(r,p,t)},$$

då på grund af N:o 10 (35):

$$\left.\begin{aligned} R &= \Phi\ (r, p, t) \\ P &= \Phi_1 (r, p, t) \\ T &= \Phi_{11}(r, p, t) \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2).$$

I stället för bågarna P och T kunna vi äfven använda azimut- och höjdbågarna, hvaraf likaledes erhålles tre eqvationer.

Taga vi deremot projektionerna af $(R_P)_T$ och af de i F ingående qvantiteterna och sätta:

$$(R_P)_T = X + Y_{\frac{\pi}{2}} + (Z_{\frac{\pi}{2}})_{\frac{\omega}{2}} = F\left[x + y_{\frac{\pi}{2}} + (z_{\frac{\pi}{2}})_{\frac{\omega}{2}}\right],$$

så finna vi med stöd af N:o 10 (37), emedan vi kunna bringa $F\left[x + y_{\frac{\pi}{2}} + (z_{\frac{\pi}{2}})_{\frac{\omega}{2}}\right]$ till formen

$$\Psi\ (x, y, z) + \Psi_1 (x, y, z)_{\frac{\pi}{2}} + \left(\Psi_{11}(x, y, z)_{\frac{\pi}{2}}\right)_{\frac{\omega}{2}}:$$

$$\left.\begin{aligned} X &= \Psi\ (x, y, z) \\ Y &= \Psi_1 (x, y, z) \\ Z &= \Psi_{11}(x, y, z) \end{aligned}\right\} . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (3).$$

Om vi tänka oss $(r_p)_t$ representera *successiva värden* både i afseende på storleken och riktningarna, d. v. s. fixera kontinuerliga punkter eller, som vi för korthetens skull kalla det, *beskrifva en kurva i rymden*, så måste $(R_P)_T$ representera motsvarande successiva värden eller beskrifva en *motsvarig* kurva i rymden. I (2) och (3) ha vi 3 eqvationer och 6 variabla. Det fordras derföre 2:ne *vilkors-eqvationer* mellan dessa 6 variabla, för att såsom eliminations-resultat erhålla relationer mellan 2:ne af dem hvilka som helst. De eliminations-resultater, som äro möjliga mellan dessa 5 eqvationer och 6 variabla, låta äfven här liksom i N:o 9 fördela sig på tre sätt: de som representera kurvan $(R_P)_T$, de som representera kurvan $(r_p)_t$ och de som uttrycka relationer mellan en variabel i den ena och den andra kurvan. Vi underlåta att ingå i någon närmare undersökning om dessa antydda eliminationer äfvensom om betydelsen af de eliminations-resultater vi erhålla, då vi uppställa blott *en enda* vilkors-eqvation. Vi inskränka oss äfven här till anförandet af några enkla exempel, och vi få till detta ändamål på förhand erinra om satserna 1, 2 och 3 i slutet af N:o 12 samt om nödvändigheten af att redu-

cera qvantiteterna till lika grundbestämningar, innan likhet mellan dem uppställes.

Till en början få vi göra en tillämpning af den i N:o 1 framhållna och i N:o 12 V bestyrkta satsen, att nämligen de räknelagar, som äro bevisade sanna för qvantiteter i ett plan i allmänhet, gälla sedan för qvantiteter i hvilket bestämdt plan som helst. Således kunna vi t. ex. sätta N:o 9 (11) under formen:

$$(R_P)_t = (\varrho_\varphi)_t + (1_{p,} \cdot r_p)_t \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Alla de kurvor vi i N:o 9 uttryckt såsom subsummerade under geometriska likheten $R_P = \varrho_\varphi + 1_{p,} \cdot r_p$ kunna vi här förmedelst (5) uttrycka såsom projicierade i grundplanet eller XY planet, i vertikalplanet eller YZ planet samt i det plan, som skär nyssnämnda plan efter grundriktningen och vertikalriktningen, eller XZ planet, då vi nämligen sätta

$$(R_P)_t = X + Y_{\frac{\pi}{2}} + (Z_{\frac{\pi}{2}})_{\frac{\omega}{2}}$$

och söka genom eliminering relationer mellan XY, XZ och YZ, eller ock då vi sätta

$$(r_{p,+p})_t = x + y_{\frac{\pi}{2}} + (z_{\frac{\pi}{2}})_{\frac{\omega}{2}}$$

och söka relationer mellan xy, xz och yz. Våra 5 för elimineringen erforderliga eqvationer få vi tydligen gifna, så snart vi genom en eqvation bestämt t. Om ϱ_φ är variabel, erhålla vi enligt N:o 9 (50) de för eliminationen behöfliga eqvationer.

Ex. 1. *Låta vi* r_p *med ett origo, fixeradt af* $(\varrho_\varphi)_t = x_1 + y_{1\frac{\pi}{2}} + (z_{1\frac{\pi}{2}})_{\frac{\omega}{2}}$, *beskrifva en cirkel i planet* t, *så bli dess projektioner*, då vi med a och a_1 beteckna konstanter och sätta $p_, = 0$ samt vikors-eqvationerna

$$\left.\begin{aligned} r &= a \\ t &= a_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6):$$

$$\left.\begin{aligned} X - x_1 &= a \operatorname{Cos} p \\ Y - y_1 &= a \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} a_1 \\ Z - z_1 &= a \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} a_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7).$$

Genom elimination af p i (7) finna vi:

$$\left.\begin{aligned} X-x_1 = \pm \frac{\sqrt{a^2 \operatorname{Cos}^2 a_1 - (Y-y_1)^2}}{\operatorname{Cos} a_1} = \pm \frac{\sqrt{a^2 \operatorname{Sin}^2 a_1 - (Z-z_1)^2}}{\operatorname{Sin} a_1} \\ Z-z_1 = \operatorname{tg} a_1 \,(Y-y_1) \end{aligned}\right\} \ldots (8).$$

Projektionerna i XY och XZ planen utgöra således ellipser och projektionen i YZ planet en rät linea.

Ex. 2. Vi behandla alldeles samma problem som i ex. 1 med den skilnad, att vi låta planvinkeln t vara variabel och $= p$, då vi i stället för vilkorseqvationerna (6) erhålla:

$$\left.\begin{aligned} r &= a \\ t &= p \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

samt i stället för projektionerna (7):

$$\left.\begin{aligned} X - x_1 &= a \operatorname{Cos} p \\ Y - y_1 &= a \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p \\ Z - z_1 &= a \operatorname{Sin}^2 p \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10).$$

Eliminera p i (10). så följer deraf:

$$\left.\begin{aligned} Y-y_1 = \pm \frac{(X-x_1)\sqrt{a^2-(X-x_1)^2}}{a} = \pm \sqrt{(Z-z_1)\{a-(Z-z_1)\}} \\ Z-z_1 = \frac{a^2-(X-x_1)^2}{a} \end{aligned}\right\} \ldots (11).$$

Projektionen af denna kurva i XY planet utgör således *en 4:de grads kurva*, i XZ planet en *parabel* och i YZ planet en *cirkel*. Emedan $(r_p)_\omega = r_{-p}$, så beskrifver r_p från $t = 0$ till $t = 2\omega$ samma kurva tillbaka.

Ex. 3. *Om vi låta r_p beskrifva en cykloid enligt N:o 9 (51), så bli dess projektioner i de respektive planen*, då vi med a_1 beteckna en konstant och sätta $t = a_1$ jemte vilkorseqvationerna N:o 9 (52):

$$\left.\begin{aligned} r &= a \\ \varrho \operatorname{Cos} \varphi &= r \, . \, p \\ \varrho \operatorname{Sin} \varphi &= r \\ t &= a_1 \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12):$$

$$\left.\begin{aligned} X &= a.p - a \operatorname{Sin} p \\ Y &= a \operatorname{Cos} a_1 - a \operatorname{Cos} p \operatorname{Cos} a_1 \\ Z &= a \operatorname{Sin} a_1 - a \operatorname{Cos} p \operatorname{Sin} a_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots . \quad (13).$$

Genom eliminering af p erhålles:

$$\left.\begin{aligned} X &= a . \operatorname{arc} \operatorname{Cos} \frac{a \operatorname{Cos} a_1 - Y}{a \operatorname{Cos} a_1} - \frac{\sqrt{2a \operatorname{Cos} a_1\, Y - Y^2}}{\operatorname{Cos} a_1} \\ &= a . \operatorname{arc} \operatorname{Cos} \frac{a \operatorname{Sin} a_1 - Z}{a \operatorname{Sin} a_1} - \frac{\sqrt{2a \operatorname{Sin} a Z - Z^2}}{\operatorname{Sin} a_1} \\ Z &= Y \operatorname{tg} a_1 \end{aligned}\right\} \ldots (14)$$

Vi kunna äfven här liksom i ex. 2 låta t vara variabel och t. ex. lika med p samt genom eliminering uttrycka cykloidens projektioner i de särskilda planen.

I (5) hafva vi reducerat geometriska likheten $R_P = \varrho_\varphi + 1_{p,} . r_p$ endast till nytt plan och sedan antydt sättet att uttrycka de under denna likhet subsumerade plana kurvors projektioner i XY, XZ och YZ planen. Vi kunna tydligen underkasta denna likhet huru många reduktioner som helst till nytt plan, ny grundriktning och nytt origo och sedan på samma sätt uttrycka de plana kurvornas projektioner i de särskilda planen. Det är klart, att samma räsonnemang gäller för hvilken likhet som helst i ett plan, af hvad form den än må vara. Vi förbigå ytterligare tillämpning af denna sats och öfvergå i stället till den enkla geometriska likheten:

$$(R_P)_T = (\varrho_\varphi)_\theta + 1_{p,} . (r_p)_t \quad \ldots \ldots \quad (15),$$

hvilken enligt N:o 12 (1) representerar en reduktion till nytt plan, ny grundriktning i detta plan samt nytt origo.

Vi anföra några högst enkla exempel för att belysa den geometriska tillämpningen af denna likhet.

Ex. 4. *Hvad är motsvariga kurvan* $(R_P)_T$ *till en kurva* r_p *i ett fixt plan* t, *hvilken går genom den af* $(\varrho_\varphi)_\theta$ *fixerade punkten och hvars projektioner* $x = r \operatorname{Cos} p$ *och* $y = r \operatorname{Sin} p$ *äro i ett konstant förhålland?*

Vi förutsätta grundriktningen hos begge kurvorna lika d. v. s. $p_{,} = 0$. Om a och a_1 beteckna konstanter, så representeras vårt problem af geometriska likheten:

$$\left(R_P\right)_T = \left(\varrho_\varphi\right)_\theta + \left(r_p\right)_t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

samt vilkorseqvationerna:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{y}{x} = \frac{r \operatorname{Sin} p}{r \operatorname{Cos} p} = \operatorname{tg} p = a \\ t = a_1 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Emedan p är konstant, representerar r_p en rät linea i det fixa planet t. $\left(R_P\right)_T$, såsom fixerande punkter på denna räta linea, representerar således en rät linea i rymden, gående genom den fixa punkten $\left(\varrho_\varphi\right)_\theta$. Denna räta linea kan ha hvilket tänkbart läge som helst i rymden, såsom gående genom punkten $\left(\varrho_\varphi\right)_\theta$ och en punkt i allmänhet i rummet, fixerad af $\left(r_p\right)_t$. Om vi taga projektionerna enligt (3) och sätta

$$\left(\varrho_\varphi\right)_\theta = x_1 + y_{1_{\frac{\pi}{2}}} + \left(z_{1_{\frac{\pi}{2}}}\right)_{\frac{\omega}{2}},$$

så följer deraf:

$$\left.\begin{array}{l} X = x_1 + r \operatorname{Cos} p \\ Y = y_1 + r \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} t \\ Z = z_1 + r \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} t \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Eliminera vi r, p och t mellan (17) och (18), så erhålla vi såsom uttryck på nyssnämnda räta linea i rymden:

$$\left.\begin{array}{l} Y - y_1 = a \operatorname{Cos} a_1 \left(X - x_1\right) \\ Z - z_1 = a \operatorname{Sin} a_1 \left(X - x_1\right) \\ Z - z_1 = \operatorname{tg} a_1 \left(Y - y_1\right) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Liksom i N:o 9 kunna vi äfven här låta origo, fixeradt af $\left(\varrho_\varphi\right)_\theta$ variera enligt en viss lag, beroende af de variabla värdena på r, p och t. I detta fall fordras det jemte de 2 förstnämnda vilkorseqva-

tionerna ännu 3 vilkorseqvationer, för att få de motsvariga kurvorna gifna i 2:ne variabla. Vi förtydliga detta genom lösningen af tvenne enkla problemer.

Ex. 5. *Hvad är motsvariga kurvan* $(R_P)_T$ *till en cirkel* r_p *i planet* $t = 0$, *hvars origo* (medelpunkt) *rör sig i den vertikala riktningen proportionelt till* r_p*:s vinkelhastighet?*

Vi förutsätta grundriktningen för begge kurvorna lika d. v. s. $p_r = 0$. Vi sätta:

$$(\varrho_\varphi)_\theta = x_1 + y_{1_{\frac{\pi}{2}}} + \left(z_{1_{\frac{\pi}{2}}}\right)_{\frac{\omega}{2}}.$$

Problemet representeras då af geometriska likheten:

$$(R_P)_T = (\varrho_\varphi)_\theta + (r_p)_t \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

samt vilkorseqvationerna:

$$\left.\begin{array}{l} r = a \\ t = 0 \\ x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = a_1 . p \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21),$$

då a och a_1 beteckna konstanter. Projiciera vi (20) och insätta värdena ur (21), så följer deraf:

$$\left.\begin{array}{l} X = a \operatorname{Cos} p \\ Y = a \operatorname{Sin} p \\ Z = a_1 . p \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots, \quad (22).$$

Eliminera p, så erhålles:

$$\left.\begin{array}{l} Y = \pm \sqrt{a^2 - X^2} = a \operatorname{Sin} \dfrac{Z}{a_1} \\ Z = a_1 . \operatorname{arc} \operatorname{Cos} \dfrac{X}{a} = a_1 . \operatorname{arc} \operatorname{Sin} \dfrac{Y}{a} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (23).$$

Den sökta kurvan $(R_P)_T$, hvars projektioner utgöras af (23), bär namnet *helice.*

Ex. 6. Vi behandla alldeles samma problem med den skillnad, att för vilkorseqvationen $r = a$ sätta vi

$$r = a - c.p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24),$$

der a och c beteckna konstanter. Enligt N:o 9 (65) beskrifver nu r_p en *Archimedis spiral*, som, gående utifrån och inåt, börjar med en radie $= a$ för $p = 0$ och slutar med en radie $= 0$, då $p = \frac{a}{c}$. I stället för (22) erhålla vi:

$$\left.\begin{aligned} X &= (a - cp) \operatorname{Cos} p \\ Y &= (a - cp) \operatorname{Sin} p \\ Z &= a_1 . p \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Genom eliminering af p erhålles:

$$\left.\begin{aligned} X &= Y \operatorname{Cotg} \frac{Z}{a_1} = \left(a - \frac{c.Z}{a_1}\right) \operatorname{Cos} \frac{Z}{a_1} \\ Y &= X \operatorname{tg} \frac{Z}{a_1} \quad = \left(a - \frac{c.Z}{a_1}\right) \operatorname{Sin} \frac{Z}{a_1} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

Denna spiral ligger tydligen på en konisk yta. Radien till denna kons bas är då $= a$ och höjden $= Z$ för $p = \frac{a}{c}$, d. v. s. $= \frac{a_1 . a}{c}$. I geometrien bär denna kurva namn af *konisk helice.*

Enligt de lagar vi i det föregående utvecklat kunna vi nu i allmänhet bestämma en fix eller rörlig punkt i förhållande till ett fixt origo, ett fixt plan och en fix grundriktning förmedelst huru många mellanliggande fixa eller rörliga origon, plan och grundriktningar som helst. Såsom fullständigare exempel på dylika bestämningar, än vi i det föregående anfört, vilja vi här uppställa till lösning några af astronomiens problemer.

Ex. 7. *Att bestämma en punkt på himlahvalfvet i förhållande till solens medelpunkt som origo, ekliptikans plan som grundplan och och vårdagjemningspunkten som grundriktning, då vi ega honom bestämd i förhållande till åskådarens öga som origo, horizontens plan som grundplan och sydpunkten som grundriktning?*

Vi låta en geometrisk qvantitet $(r_p)_t$ fixera punkten i förhållande till åskådarens öga, horizontens plan och sydpunkten, samt en geo-

metrisk qvantitet $(R_P)_T$ fixera samma punkt i förhållande till solen, ekliptikans plan och vårdagjemningspunkten (eqvatorplanets och ekliptikans skärningslinea, i riktning från jorden till solen, då jorden är i vårdagjemningen). Vår uppgift blir då att reducera $(r_p)_t$ till $(R_P)_T$:s grundbestämningar.

Vi räkna här våra positiva riktningar och positiva bågar, såsom figurerna i det föregående af detta arbete antyda.

För att få våra formler att öfverensstämma med astronomiens, använda vi här enligt N:o 10 (24) azimut- och höjdbågarna, då vi således för $(r_p)_t$ sätta $r_{-A+h_{\substack{\omega\\ \Upsilon}}}$, då A är $=$ *astronomiska azimut* och h $=$ *astronomiska höjden* eller *zenitdistansens komplement*, samt för $(R_P)_T$ sätta $R_{\lambda+\beta_{\substack{\omega\\ \Upsilon}}}$, då λ och β äro punktens *longitud* och *latitud* i ekliptikan, räknade från vårdagjemningspunkten.

Innan vi skrida till uppställningen af detta problem få vi på förhand ange den astronomiska betydelsen af de i detta problem ingående storlekar och bågar:

φ = polhöjden,
θ = stjerntiden, uttryckt i båge,
ϱ = jordens radie, förutsatt konstant,
ε = ekliptikans obliqvitet,
ϱ' = radien i jordbanan,
$\varphi_{,}$ = denna radies vinkel, räknad från vårdagjemningspunkten.

Vi ha nu först att reducera $r_{-A+h_{\substack{\omega\\ \Upsilon}}}$ till den positiva riktningen af horizont- och eqvatorplanens skärningslinea eller, som är detsamma, vestpunkten, hvaraf erhålles:

$$1_{\frac{\pi}{\Upsilon}} \cdot \left(r_{-A+h_{\substack{\omega\\ \Upsilon}}}\right) = r_{\frac{\pi}{2}-A+h_{\substack{\omega\\ \Upsilon}}}.$$

Vidare reducera vi denna qvantitet till eqvatorns plan medelst planvinkeln $-\left(\frac{\omega}{2}-\varphi\right)=\varphi-\frac{\omega}{2}$, hvaraf följer

$$\left(r_{\frac{\pi}{2}} - A + h_{\frac{\omega}{2}}\right)_{\varphi - \frac{\omega}{2}};$$

vidare skall denna qvantitet reduceras från vestpunkten i eqvatorplanet till vårdagjemningspunkten, hvaraf följer:

$$1_{\theta - \frac{\pi}{2}} \cdot \left(r_{\frac{\pi}{2}} - A + h_{\frac{\omega}{2}}\right)_{\varphi - \frac{\omega}{2}},$$

då nämligen θ är bågen från vårdagjemningspunkten till sydpunkten. Denna qvantitet reducera vi vidare från åskådarens öga till jordens medelpunkt förmedelst qvantiteten $\varrho_{\theta + \varphi_{\frac{\omega}{2}}}$, vidare den då uppkomna summan till ekliptikans plan medelst planvinkeln $-\varepsilon$ och slutligen från jordens medelpunkt till solen förmedelst qvantiteten $\varrho'_{\varphi,}$. Problemet uppställdt får då följande utseende:

$$\left.\begin{aligned} R_{\lambda + \beta_{\frac{\omega}{2}}} &= \varrho'_{\varphi,} + \left[\varrho_{\theta + \varphi_{\frac{\omega}{2}}} + 1_{\theta - \frac{\pi}{2}} \cdot \left(r_{\frac{\pi}{2}} - A + h_{\frac{\omega}{2}}\right)_{\varphi - \frac{\omega}{2}}\right]_{-\varepsilon} \\ &= \varrho'_{\varphi,} + \left(\varrho_{\theta + \varphi_{\frac{\omega}{2}}}\right)_{-\varepsilon} + \left[1_{\theta - \frac{\pi}{2}} \cdot \left(r_{\frac{\pi}{2}} - A + h_{\frac{\omega}{2}}\right)_{\varphi - \frac{\omega}{2}}\right]_{-\varepsilon} \end{aligned}\right\} \ldots (27).$$

Om vi sönderlägga (27) enligt de i N:o 11 framställda reduktionslagar, så erhålla vi:

$$\left.\begin{aligned} &R \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\lambda = \varrho' \operatorname{Cos}\varphi, + \varrho \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\theta \\ &\quad + r\left\{\operatorname{Cos}h \operatorname{Sin}A \operatorname{Sin}\theta + (\operatorname{Cos}h \operatorname{Cos}A \operatorname{Sin}\varphi + \operatorname{Sin}h \operatorname{Cos}\varphi) \operatorname{Cos}\theta\right\} \\ &R \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}\lambda = \varrho' \operatorname{Sin}\varphi, + \varrho(\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\varepsilon + \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\varepsilon) \\ &\quad + r\left\{[(\operatorname{Cos}h \operatorname{Cos}A \operatorname{Sin}\varphi + \operatorname{Sin}h \operatorname{Cos}\varphi)\operatorname{Sin}\theta - \operatorname{Cos}h \operatorname{Sin}A \operatorname{Cos}\theta] \operatorname{Cos}\varepsilon \right. \\ &\qquad \left. + [\operatorname{Sin}h \operatorname{Sin}\varphi - \operatorname{Cos}h \operatorname{Cos}A \operatorname{Cos}\varphi] \operatorname{Sin}\varepsilon\right\} \\ &R \operatorname{Sin}\beta = \varrho(\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varepsilon - \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Sin}\varepsilon) \\ &\qquad + r\left\{[\operatorname{Sin}h \operatorname{Sin}\varphi - \operatorname{Cos}h \operatorname{Cos}A \operatorname{Cos}\varphi] \operatorname{Cos}\varepsilon \right. \\ &\left. - [(\operatorname{Cos}h \operatorname{Cos}A \operatorname{Sin}\varphi + \operatorname{Sin}h \operatorname{Cos}\varphi)\operatorname{Sin}\theta - \operatorname{Cos}h \operatorname{Sin}A \operatorname{Cos}\theta) \operatorname{Sin}\varepsilon\right\} \end{aligned}\right\} (28).$$

De vilkorseqvationer, som erfordras för att medelst (28) bestämma $R_{\lambda + \beta_{\frac{\omega}{2}}}$ eller i allmänhet relationer mellan tvenne eller flera af de i detta problem ingående qvantiteter, förbigå såsom liggande ut-

om målet för detta arbete. I stället vilja vi i följande 2:ne exempel skärskåda det uppställda problemet ur tvenne nya synpunkter.

Ex. 8. *Att bestämma en punkt på himlahvalfvet i förhållande till åskåderens öga, horizontens plan och sydpunkten, då vi ega honom bestämd i förhållande till solens medelpunkt, ekliptikans plan och vårdagjemningspunkten.*

Detta problem, såsom utgörande en ren omvändning af det förra, fordrar ingen särskild uppställning, utan härledes direkt ur (27) enligt N:o 12 III:

$$r_{-A+h_{\frac{\omega}{2}}} = 1_{-\frac{\pi}{2}} \cdot \left\{ 1_{\frac{\pi}{2}-\theta} \cdot \left[\left(R_{\lambda+\beta_{\frac{\omega}{2}}} + \varrho'_{\varphi,+\pi} \right)_{\varepsilon} + \varrho_{\theta+(\varphi+\pi)_{\frac{\omega}{2}}} \right] \right\}_{\frac{\omega}{2}-\varphi} \ldots (29).$$

Ex. 9. *Att bestämma en punkt på himlahvalfvet i förhållande till åskådarens öga, ekliptikans plan och vårdagjemningspunkten, då vi ega honom bestämd i förhållande till åskådarens öga, horizontens plan och sydpunkten.*

Uppställningen af detta problem härleda vi direkt ur (27) enligt N:o 12 (10):

$$R'_{\lambda'+\beta'_{\frac{\omega}{2}}} = R_{\lambda+\beta_{\frac{\omega}{2}}} + \varrho'_{\varphi,+\pi} + \left(\varrho_{\theta+(\varphi+\pi)_{\frac{\omega}{2}}} \right)_{\frac{\omega}{2}-\varepsilon}$$

$$= \left[1_{\theta-\frac{\pi}{2}} \cdot \left(r_{\frac{\pi}{2}-A+h_{\frac{\omega}{2}}} \right)_{\varphi-\frac{\omega}{2}} \right]_{-\varepsilon} \quad . \; . \; . \; . \; (30)$$

R' är $= r$ samt λ' och β' punktens longitud och latitud, sedda af åskådaren på jordytan.

Vi anföra nu ett nytt problem, för att få vår reduktionsmethod belyst ur åter en ny synpunkt.

Ex. 10. *Att bestämma månens medelpunkt i förhållande till solens medelpunkt som origo, ekliptikans plan som grundplan och vårdagjemningspunkten som grundriktning, då vi ega honom bestämd i förhållande till jordens medelpunkt som origo, månens plan som grundplan och den positiva riktningen af månplanets och ekliptikans skärningslinea som grundriktning.*

Vi låta en geometrisk qvantitet $r'_{p,}$ liggande i månplanet och hänförd till jordens medelpunkt samt den positiva riktningen af månpla-

nets och ekliptikans skärningslinea eller, som är detsamma, den positiva nodlinien (månens uppstigande nod), fixera månens medelpunkt. Denna qvantitet ega vi då att reducera till ekliptikans plan medelst planvinkeln $t_{,}$ = månbanans inklination samt vidare från den positiva riktningen af nodlinien till vårdagjemningspunkten förmedelst qvantiteten 1_v, då således v är den positiva nodliniens longitud, och slutligen från jordens medelpunkt till solens medelpunkt förmedelst qvantiteten $\varrho'_{\varphi_{,}}$. Problemet uppställdt får då följande utseende.

$$R_{\lambda+\beta_{\frac{\omega}{2}}} = \varrho'_{\varphi_{,}} + 1_v \cdot \left(r'_{p_{,}}\right)_{t_{,}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (31),$$

då λ och β äro månens longitud och latitud samt R afstånd från solen.

Låta vi nu $r_{-A+h_{\frac{\omega}{2}}}$ i (27) äfven fixera månens medelpunkt, så erhålla vi genom jemförelse mellan (27) och (31):

$$1_v \cdot \left(r'_{p_{,}}\right)_{t_{,}} = \left[\varrho_{\theta+\varphi_{\frac{\omega}{2}}} + 1_{\theta-\frac{\pi}{2}} \cdot \left(r_{\frac{\pi}{2}-A+h_{\frac{\omega}{2}}}\right)_{\varphi-\frac{\omega}{2}}\right]_{-\varepsilon} \quad . \; . \; . \quad (32).$$

Vi hafva således i (32) uttryckt månbanans inklination och nodlongitud samt månpunktens afstånd r' från jordens medelpunkt med dess riktning $p_{,}$, räknad från den positiva nodlinien, i azimut, höjd, polhöjd, stjerntid, obliqvitet samt afstånden ϱ och r.

Vi underlåta att utföra de räkningar, som äro tecknade i (29)—(32), såsom varande af enahanda natur med dem, förmedelst hvilka (28) erhölls ur (27).

Slutligen få vi anföra 2:ne enklare exempel, i ändamål att få den geometriska betydelsen af astronomiens s. k. *hjelpvinklar* ådagalagd.

Ex. 11. *Att bestämma en punkt på himlahvalfvet i förhållande till jordens medelpunkt, eqvatorplanet och sydpunkten, då vi ega honom bestämd i förhållande till åskådarens öga, horizontens plan och sydpunkten.*

Vi beteckna med R afståndet från jordens medelpunkt till punkten på himlahvalfvet samt med t och δ *timvinkel* och *deklination* i eqvatorplanet. Vi sätta

$$r_{\frac{\pi}{2}-A+h_{\frac{\omega}{2}}} = \left(r_p\right)_{\tau} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33),$$

då således:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\pi}{2}-A &= az\ (p,\tau) \\ h &= cz\ (p,\tau) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (34).$$

Problemet uppställdt får då följande utseende:

$$R_{-t+\delta_{\frac{\omega}{2}}} = (\varrho_{\varphi})_{\frac{\omega}{2}} + 1_{-\frac{\pi}{2}} \cdot \left(r_{\frac{\pi}{2}-A+h_{\frac{\omega}{2}}}\right)_{\varphi-\frac{\omega}{2}}$$

$$= (\varrho_{\varphi})_{\frac{\omega}{2}} + 1_{-\frac{\pi}{2}} \cdot (r_p)_{\tau+\varphi-\frac{\omega}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (35).$$

Om vi sönderlägga (35), så erhålla vi:

$$\left.\begin{aligned} R\ \mathrm{Cos}\ \delta\ \mathrm{Cos}\ t &= \varrho\ \mathrm{Cos}\ \varphi + r\ \{\mathrm{Cos}\,h\ \mathrm{Cos}\,A\ \mathrm{Sin}\ \varphi + \mathrm{Sin}\,h\ \mathrm{Cos}\ \varphi\} \\ &= \varrho\ \mathrm{Cos}\ \varphi + r\ \mathrm{Sin}\,p\ \mathrm{Cos}\,(\tau + \varphi - \tfrac{\omega}{2}) \\ R\ \mathrm{Cos}\ \delta\ \mathrm{Sin}\ t &= r\ \mathrm{Cos}\,h\ \mathrm{Sin}\,A = r\ \mathrm{Cos}\,p \\ R\ \mathrm{Sin}\ \delta &= \varrho\ \mathrm{Sin}\ \varphi + r\ \{\mathrm{Sin}\,h\ \mathrm{Sin}\,\varphi - \mathrm{Cos}\,h\ \mathrm{Cos}\,A\ \mathrm{Cos}\,\varphi\} \\ &= \varrho\ \mathrm{Sin}\ \varphi + r\ \mathrm{Sin}\,p\ \mathrm{Sin}\,(\tau + \varphi - \tfrac{\omega}{2}) \end{aligned}\right\} \ldots (36).$$

Bågarna p och τ utgöra här *astronomiska hjelpvinklar* och äro gifna till sin geometriska betydelse genom (34).

Ex. 12. *Att bestämma en punkt på himlahvalfvet i förhållande till åskådarens öga, horizontens plan och sydpunkten, då vi ega honom bestämd i förhållande till jordens medelpunkt, eqvatorplanet och sydpunkten.*

Vi sätta här:

$$R_{\frac{\pi}{2}-t+\delta_{\frac{\omega}{2}}} = (R_P)_T \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

då således:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\pi}{2}-t &= az\ (P, T) \\ \delta &= cz\ (P, T) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38),$$

hvaraf enligt (29) problemets uppställning blir följande:

$$r_{-A+h_{\frac{\omega}{2}}} = -\left(\varrho_{\frac{\pi}{2}}\right)_{\frac{\omega}{2}} + 1_{-\frac{\pi}{2}} \cdot \left(R_{\frac{\pi}{2}-t+\delta_{\frac{\omega}{2}}}\right)_{\frac{\omega}{2}-\varphi}$$

$$= -\left(\varrho_{\frac{\pi}{2}}\right)_{\frac{\omega}{2}} + 1_{-\frac{\pi}{2}} \cdot (R_P)_{T+\frac{\omega}{2}-\varphi} \quad \ldots\ldots \quad (39),$$

ithy att vi nämligen finna

$$1_{-\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\varrho_{\frac{\pi}{2}+(\varphi+\pi)_{\frac{\omega}{2}}}\right]_{\frac{\omega}{2}-\varphi} = -\left(\varrho_{\frac{\pi}{2}}\right)_{\frac{\omega}{2}}.$$

Genom sönderläggning af (39) erhålla vi således:

$$\left.\begin{aligned} r \operatorname{Cos} h \operatorname{Cos} A &= R\left\{\operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos} t \operatorname{Sin}\varphi - \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Cos}\varphi\right\} \\ &= R \operatorname{Sin} P \operatorname{Cos}\left(T + \tfrac{\omega}{2} - \varphi\right) \\ r \operatorname{Cos} h \operatorname{Sin} A &= R \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Sin} t = R \operatorname{Cos} P \\ r \operatorname{Sin} h &= -\varrho + R\left\{\operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos} t \operatorname{Cos}\varphi + \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Sin}\varphi\right\} \\ &= -\varrho + R \operatorname{Sin} P \operatorname{Sin}\left(T + \tfrac{\omega}{2} - \varphi\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (40).$$

Bågarna P och T utgöra här *hjelpvinklar* och äro gifna till sin geometriska betydelse genom (38).

Kemisk-analytisk undersökning af Pyrosmalith.

Af

J. LANG.

Den klass af mineralier, till hvilken Pyrosmalithen såsom en förening af ett silikat med en chlormetall visar sig närmast höra, är en bland de mest fåtaligt representerade, på samma gång dess få species ytterst sparsamt förekomma. Denna sällsynthet, som icke minst gäller Pyrosmalithen, hvilken, såvidt bekant är, ej blifvit funnen på mer än ett enda ställe [1]), Nordmarkens grufvor i Philipstads bergslag i Wermland, och der i ringa mängd, har tvifvelsutan varit förnämsta orsaken, hvarföre mineralet, sedan det först upptäcktes och analyserades, ej varit föremål för förnyade undersökningar till utrönande af dess kemiska constitution, hvaröfver de föreliggande analytiska bestämmelserna ej tillåta att med säkerhet döma.

Den enda kemiska undersökning vi ega öfver Pyrosmalithen är nemligen verkställd af *Hisinger* [2]) 1815, och, ehuru utförd med all

---

1) I *Breithaupts* "Vollständiges Handbuch der Mineralogie". Dresden u. Leipzig 1841 Bd. II s. 372 förekommer en uppgift, att Pyrosmalithen äfven skulle hafva blifvit funnen vid Nya Kopparberget i Westmanland, och af hans framställning vill det synas, som om stuffer från denna fundort blifvit af honom undersökta, enär han angifver vissa skiljaktigheter mellan denna varietet och den från Nordmarken med afseende på de physiska egenskaperna. Denna uppgift torde dock sannolikt bero på en förvexling, ty hvarken omnämner *Hisinger* i sin Mineralogiska Geografi öfver Sverige, att Pyrosmalith blifvit funnen vid Nya Kopparberget, ej heller träffas, såvidt oss bekant är, någon antydan i sådant afseende hos öfrige mineraloger, utom hvad *Hausmann* i sin "Reise durch Scandinavien" Th. V. s. 13 omförmäler, nemligen, att det blifvit honom berättadt, att i Bergs-Collegii samlingar i Stockholm skulle finnas en stuff af detta mineral från Nya Kopparberget, som genom sin pistaziegröna färg skiljde sig från den vanliga Pyrosmalithen.

2) Afhandlingar i Fysik, Kemi och Mineralogi 1815. Del. IV p. 317.

den [illegible] [illegible] noggranhet, som utmärker denne berömde analytikers arbeten, synes dock otillräckligheten af material[1]) i förening med bristande metoder för ett noggrant bestämmande af de oxidationsgrader, hvilka metallerna, som constituera mineralet, deri förefinnas, hafva förorsakat att desamma ej eger all den fullständighet, som är nödvändig för att komma till en närmare kännedom om mineralets verkliga sammansättning; och huru ringa bestämdhet i detta hänseende förefinnes, torde klarast framgå ur en sammanställning af de olika formler, som af skilda mineraloger blifvit uppställda för Pyrosmalithen. Sålunda betraktas den af *Berzelius*[2]) såsom varande sammansatt af $Fe\,Cl^2 + Fe\,H^6 + 4\,Fe^3\,Si^2 + Mn^3\,Si^2$, en åsigtsform, som, om än med ringa ändring följes af *Rammelsberg*[3]), *Rose*[4]), *Haidinger*[5]) m. fl., hvaremot *Nordenskjöld*[6]) anser dess sammansättnig vara $Fe\,H^6 + 4\,(Fe + Mn)^3\,Si^2 + Fe\,Cl^2$ och *Rammelsberg*[7]) har på sednaste tiden såsom dess sannolika formel uppställt $Fe\,Cl + 3\left(\begin{matrix}Fe^4\\Mn^4\end{matrix}\right\}Si^3 + 2\,H\Big)$ — Denna väsentliga skiljaktighet i åsigter, hvilka likväl alla stödja sig på de genom *Hisingers* bestämning vunna analytiska data, torde tillräckligt ådagalägga, att ett förfullständigande af dessa sistnämnda var nödvändigt för utrönande af Pyrosmalithens constitution, och det följande utgör en redogörelse för de försök, som förf. anställt för att i någon mon bidraga till vinnande af detta ändamål.

Mineralets stora sällsynthet skulle emedlertid hafva lagt väsentliga hinder i vägen för denna undersökning, synnerligast då Pyrosmalithers enda fundort numera är nästan fullkomligt uttömd, om ej Professor *L. F. Svanberg* ur sin enskilda mineralsamling godhetsfullt hade ställt tvänne dyrbara stuffer af detta fossil från Nordmarken till

---

1) *Berzelius.* "Försök till ett rent kemiskt mineralsystem." Afh. i Fysik, Kemi etc. 1815 Del. IV p. 141.

2) *Rammelsberg:* Berzelius's neues chemisches Mineralsystem. Nürnberg 1847. s. 212.

3) *Rammelsberg.* "Berzelius's neues chemisches Mineralsystem." Nürnberg 1847. p. 244.

4) *G. Rose.* "Das krystallo-kemische Mineralsystam." Leipzig 1852 s. 41.

5) *Haidinger.* "Handbuch der bestimmenden Mineralogie." Wien 1845 s. 523.

6) *Nordenskjöld.* "Ueber das atomistisch-chemische Mineralsystem u. das Examinations-System der Mineralien." Helsingfors 1849 s. 133.

7) *Rammelsberg.* "Handbuch der Mineralchemie." Leipzig 1860 s. 876.

mitt förfogande, och det må derföre tillåtas mig att begagna detta tillfälle för att hembära honom min tacksamhet för denna uppoffring.

Innan vi öfvergå till framläggande af de analytiska bestämmelser, som blifvit af oss verkställda, torde en kort redogörelse för *Hisingers* undersökning vara af nöden dels för att sålunda lemna tillfälle till en jemförelse mellan de vunna resultaterna dels ock för att angifva de genom densamma mindre fullständigt utredda förhållanden, hvilkas närmare granskning utgjort det hufvudsakliga syftemålet med våra försök.

Den första af de tvänne analyser, hvilka *Hisinger* verkställt å Pyrosmalithen, utgår från det i öppen degel glödgade mineralet och de sålunda funna värdena äro, beräknade på 100 delar obrändt fossil, följande:

Kiselsyra	35,40	
Jernoxid	32,60	
Manganoxid [1])	23,91	= 21,49 $\dot{Mn}$.
Lerjord	0,60	
Saltsyra och Vatten	6,50	(såsom glödgningsförlust.)

Det sätt, hvarpå här summan af chlor- och vattenhalten blifvit bestämd, innebär icke någon sådan tillförlitlighet, att det funna värdet kan anses vara ens approximativt riktigt, ty äfven under förutsättning, att de vid kiselsyran bundna metalloxiderna icke underginge någon förändring genom upphettningen, och oafsedt den oriktighet, som måste uppstå till följe af det vid chloren bnndna jernets oxidation, måste likväl en felaktighet uppkomma på grund af det förflygtigande af jernchlorid som *Hisinger* iakttagit vid mineralets glödgning i slutet kärl, hvarvid han fann, att en sur vätska öfverdestillerade, som var svagt gul af upplöst jernchlorid. Af sist anförda förhållande följer jemväl, att ej heller jernhalten, sådan den blifvit funnen i föreliggande analys, kan betraktas såsom fullt riktig, enär den måste hafva utfallit mindre än den i sjelfva verket skulle vara, möjligen ytterligare minskad genom den omständigheten, att jernoxiden, utfälld såsom benzoësyradt salt, glödgades och vägdes utan att förut behandlas med ammoniak till syrans aflägsnande. Af de genom denna analys erhållna bestämmelserna är det sålunda endast värdena på kiselsyra och mangan, som kunna betraktas såsom adæquata uttryck af de i mineralet ingående mängderna af dessa ämnen.

---

1) Vid tiden för denna undersökning skiljde man ej ännu mellan Manganoxidoxidul och Manganoxid. De anförda värdena äro beräknade af de 23,10 % $\dot{Mn}\ \ddot{Mn}$, hvilka *Hisinger* funnit.

Hisingers andra analys hade förnämligast till ändamål att utröna mineralets chlorhalt. Det decomponerades derföre med salpetersyra i slutet kärl, och sedan kiselsyran afskiljts, fälldes lösningen med salpetersyrad silfveroxid, hvarefter de öfriga beståndsdelarne bestämdes. De sålunda funna värdena äro:

Kiselsyra	35,850	
Jernoxid	35,480	
Manganoxid ($\dot{\mathrm{Mn}}\,\dddot{\mathrm{Mn}}$)	23,444	(= 24,26; $\ddot{\mathrm{Mn}} = \dot{\mathrm{Mn}}$ 21,81)
Saltsyra	2,905	
Kalkjord	1,210	

Härvid bör erinras, att den upptagna qvantiteten saltsyra är beräknad ur chlorsilfret betraktadt såsom saltsyrad silfveroxid $\ddot{\mathrm{Ag}}\,\ddot{\mathrm{M}}^2$ ($\ddot{\mathrm{Ag}}$: $\ddot{\mathrm{M}}^2$ = 80,90 : 19,10 [1])), hvarföre, med en riktigare beräkningsgrund, den funna mängden Ag €l ger en chlorhalt af 3,77 %. Med afseende på sjelfva sättet för chlorbestämningen skulle möjligen kunna anmärkas, att en förlust kunnat uppstå derigenom, att den vid mineralets digestion med salpetersyra, uppkommande qväfoxiden, hvilken enligt *Hisingers* uppgift tid efter annan utsläpptes ur det täppta kärlet, fört med sig någon liten del af de bildade chlorhaltiga produkterna.

Den större jernhalt, som denna analys utvisar i jemförelse med den förra, har sin förklaring uti hvad ofvanföre blifvit antydt med afseende på de orsaker, hvilka föranledt en oriktighet vid jernbestämningen, då det glödgade mineralet valdes till utgångspunkt; men ehuru sålunda det sist funna värdet måste betraktas såsom det riktigare, torde likväl dervid kunna anmärkas, att detsamma bör hafva utfallit i någon mon för högt, enär deruti ingår den lerjordshalt, som den första analysen angifver och möjligen dessutom något kiselsyra, hvarpå jernoxiden icke blifvit pröfvad.

Om bägge analyserna gäller föröfrigt, att den afskiljda kiselsyran ej blifvit underkastad något prof till bestämmande af dess renhet; men i betraktande af den öfverensstämmelse, som visar sig mellan de i båda fallen funna värdena, oaktadt mineralets decomposition skedt på olika vägar, torde med sannolikhet kunna antagas, att den funna kiselsyrehalten icke i någon väsentlig mon skiljer sig från den verkliga.

Vid beräkningen af mineralets sammansättning utgår *Hisinger* från de genom den sist anförda analysen vunna resultaterna, och med stöd deraf, att mineralets vattenhalt, ehuru ej närmare bestämd, likväl

---

1) *Berzelius.* "Tabell som utvisar vigten af större delen vid den oorganiska kemiens studium märkvärdiga enkla och sammansatta kroppars atomer." Stockholm 1818 p. 45.

synes vara större än den förlust af 1 %, som analysen utvisar, anser han sig böra antaga att manganen och jernet ej ingå i mineralet med samma oxidationsgrader, hvari de vid analysen blifvit bestämda, och betraktar derföre mineralets hufvudmasa såsom ett bisilikat af manganoxidul och jernoxidul $mnS^2 + fS^2$. — Med afseende på den ingående chlorföreningen åter antager han dels på grund af mineralets förhållande vid upphettning i slutet kärl, dels ock till följe af dess olöslighet i vatten, att densamma är saltsyrad jernoxid förenad med jernoxid till ett basiskt salt, hvilket dessutom såsom constituent skulle innehålla vatten [1]).

Såsom det egentliga resultatet af sin analys framställer han derföre följande:

Kiselsyra	35,850	
Jernoxidul	21,810	
Manganoxidul	21,140	
Basisk saltsyrad jernoxid	14,095	($\dddot{Fe}\ \ddot{M}^3 + 3\ \dddot{Fe}$)
Vatten och förlust	5,895	

hvarvid han anser den egentliga vattenhalten vara 4 %, utgående från den förutsättningen, att vattnet bör innehålla lika mycket syre som jernoxiden i det basiska saltet.

Af den gjorda framställningen synes, att det ofullständiga i dessa analyser, åtminstone såvidt deraf en osäkerhet med afseende på mineralets sammansättning kunnat härflyta, ligger uti en mindre noggran bestämning af vattenhalten jemte frånvaron af alla data till ett säkert bedömande af de ingående metallernas oxidationsgrader.

Pyrosmalithen, sådan den förefans uti de stuffer, hvarur materialet till förf:s analytiska försök hemtades, visade i allmänhet samma yttre karakterer, som blifvit af *Hisinger* angifna. Krystallerna, sexsidiga prismer utan tillspetsning och af 1/2 till 1 tums längd, omgåfvos närmast af kalkspath, som var invext i en grön matrix, med här och der spridda korn af magnetisk jernmalm samt en och annan svafvelkiskrystall; deras fria ytor voro matta och af en smutsigt grön i lefverbrunt dragande färg och äfven genomgångsytorna, såvidt de lågo i dagen, visade i jemförelse med de friska en svagare glans och en i

1) Den halt af lerjord och kalk, som de särskildta analyserna utvisa, anser *Hisinger* såsom beroende på främmande inblandningar, hvarföre de icke ingå i beräkningen af mineralets sammansättning.

gröngult gående skiftning. — Denna förändring, såvidt den kan betraktas såsom en sådan, hade emedlertid ej sträckt sig längre än till sjelfva ytan, ty omedelbart derunder egde mineralet sin egendomliga glans och färg. Likväl företedde understundom vid krystallernas sönderklyfniug den med basiska planet paralella genomgångsytan ett matt gråhvitt öfverdrag, som endast med svårighet kunde aflösas, men som ej tycktes vara metamorphoseradt mineral, ty, så ofta detsamma förekom, visade sig ytan ojemn och skroflig, och under loupen framstodo dessa ojemnheter såsom afrundade upphöjningar på den plana ytan. Föröfrigt funnos i mineralet insprängda krystaller af kalkspath, magnetisk jernmalm och svafvelkis, hvarföre den mest minutiösa styckning af fossilet var nödvändig för erhållande af ett till analysen lämpligt material.

Med afseende på mineralets förhållande för blåsröret hafva vi föga eller intet att tillägga utöfver det redan bekanta. De vanliga flussmedlen gifva reactioner för jern och mangan; och chloren tillkännagifver sin närvaro såväl genom den lukt af saltsyra, som mineralet sprider vid upphettning i och för sig, som ock genom den intensivt blå färg, som detsamma meddelar blåsrörslågan vid behandling med kopparoxidhaltigt phosphorsalt.

Pyrosmalithens egentliga vigt, som af *Hisinger* bestämdes till 3,081, har sedermera af *Breithaupt* blifvit uppgifven variera emellan 2,958 och 3,180. Redan i det föregående hafva vi haft tillfälle anföra, att denne sistnämnde mineralog, på grund af sina undersökningar af Pyrosmalithens physiska egenskaper antager tillvaron af olika varieteter af detta mineral, och hans första meddelande [1]) i detta hänseende rörer skiljaktigheterna i hårdhet och specifik vigt, i det han nemligen funnit, att den vanliga varieteten (från Nordmarken) vägde 3,008 och egde vida mindre hårdhet än en annan, hvars fundort skulle vara Nya Kopparberget, och hvars egentliga vigt visat sig vara 3,173. Samtidigt antyder han jemväl den sannolika orsaken till dessa olikheter, nemligen en förvittring hos den förstnämda varieteten och förfullständigar sedermera dessa uppgifter uti sin "Vollständiges Handbuch der Minerolgie" 1841. Bd II s. 373, hvarest han anmärker såsom en ytterligare skiljaktighet, att den förvittrade Pyrosmalithen är fullkomligt ogenomskinlig, under det den friska är genomlysande. På samma ställe anför han jemväl, att hårdheten hos den förra nedgår ända till 4,5 och

1) *Breithaupt:* "Ueber die specifischen Gewichte einiger Mineralien" inf. i *Schweigger-Seidel's* Neues Jahrbuch der Chemie u. Physik. 1831 Bd. II. s. 225.

eg. vigten till 2,895—3,008, hvaremot mineralet i sitt oförändrade tillstånd eger en hårdhet af 6,5—7,5 [1]) och väger 3,173—3,180.

Då de yttre karaktererne hos den Pyrosmalith, som gifvit materialet för vår undersökning, icke fullkomligt öfverensstämde med de af *Breithaupt* för Nordmarks-varieteten angifna, hvarken med afseende på färgnyancen eller den ogenomskinlighet, som han anser tillhöra densamma, så utvaldes med största sorgfällighet fina splittror af mineralet till bestämmande af dess egentliga vigt. Trenne särskilda försök, af hvilka tvänne verkställdes å samma mineralstycken gåfvo 3,1703, 3,174 och 3,168 (temperaturen 14°—15° C.)

Den nära öfverensstämmelsen mellan dessa tal och dem *Breithaupt* funnit för den icke vittrade varietetens specifika vigt, föranledde en pröfning af mineralets hårdhetsgrad, för att utröna, huruvida äfven i detta hänseende en motsvarande likhet gjorde sig gällande. Härvid visade sig, att såväl Skapolith från Arendal som Apatit från Schlackenwald och Moroxit från Pargas med lätthet repa Pyrosmalithen, utan att sjelfva taga något intryck derutaf, hvaremot Flusspath repas af densamma, men ej sjelf gör något intryck på Pyrosmalithen, hvarför mineralets hårdhetsgrad efter den af *Mohs* uppgjorda skalan skulle vara 4,5 [2]), enligt *Breithaupt* åter 5,5.

I detta afseende synes sålunda en väsentlig skiljaktighet ega rum mellan den af oss undersökta Pyrosmalithen och de varieteter af mineralet, för hvilka *Breithaupt* funnit lika eller föga afvikande egentlig vigt, en skiljaktighet, som tyckes antyda, att i detta fall en olika specifik vigt ej betingar en motsvarande olikhet i hårdheten hos ett och samma mineral.

Såsom förut blifvit antydt, hafva de analytiska försök, hvilka vi anställt å Pyrosmalithen, haft till närmasta syftemål ett noggrannare utrönande af mineralets vattenhalt och de deri ingående metallernas syrsättningsgrader; men då bestämningen af constituenterna i öfrigt, äfven om den icke ledde till andra resultater än de redan funna, likväl alltid borde ega ett värde såsom en bekräftelse af dessa och dessutom i viss mon kunde tjena såsom kontroll på de af oss egentligen afsedda bestämmelserna, så har äfven en sådan blifvit företagen.

---

1) Härvid bör erinras, att *Breithaupt* följer den af honom uppställda tolfdelade hårdhetsskalan och att sålunda de här uppgifna talvärdena utmärker att Pyrosmalithens hårdhet har till gränsor å ena sidan Kalkspath (4) å den andra Adular (8). Handb. der Mineralogie Bd. I s. 377.

2) Samma hårdhet, som vi här hafva funnit, angifver jemväl *Erdman* uti sin "Lärobok i Mineralogi". Stockholm 1853 s. 384.

Försöken i dessa särskilda riktningar, närmast betingade af sättet för mineralets sönderdelning, hafva vi sökt att i det följande sammanställa, men måste dervid på förhand anmärka, att en eller annan oegentlighet ej kunnat undvikas.

Med afseende på mineralets förberedande till analysen, hafva vi endast att omnämna, det den största omsorg blifvit använd på erhållandet af ett möjligast rent material och att detta, som finrifvet och slammadt [1]) bildade ett ljust grågrönt pulver, torkades öfver svafvelsyra under luftpumpens recipient och derefter användes till de särskilda bestämmelserna.

A. Undersökning af Pyrosmalith decomponerad medelst salpetersyra.

Då decompositionen med denna syra i köld endast långsamt försiggår, och föröfrigt användandet af en högre temperatur borde åstadkomma en ej blott hastigare, utan äfven fullständigare sönderdelning, så verkställdes densamma på det sätt, att mineralpulvret behandlades med syran uti en retort, hvars hals var förbunden med flera förenade Liebigska absorptions-rör, innehållande utspädd kaustik ammoniak till upptagande af de chlorhaltiga produkter, som möjligen kunde förflygtigas. Retorten uppvärmdes långsamt, och temperaturen stegrades småningom, tills vätskan var nära kokning; sönderdelningen försiggick med lätthet, och efter några timmar visade den sig vara slutad.

Med afseende på de vidare detaljerna vid analysen må här endast nämnas, att den af ammoniaken upptagna chloren särskildt bestämdes, hufvudsakligen för att utröna, huru stor del af densamma förflygtigats under mineralets decomposition, emedan derpå till en viss grad methodens värde berodde, för så vidt som flera möjligheter till fel förefunnes i den mon qvantiteten af flygtiga chlorhaltiga produkter var större.

I. a) 1,3476 gramm mineral, decomponeradt på ofvan anförda sätt, gaf 0,4682 gr. afskiljd kiselsyra.

b) Filtratet efter kiselsyran försattes med salpetersyrad silfveroxid och lemnade en fällning af 0,1903 gr. Ag Cl, hvilket tillsamman med de 0,0126 gr. Ag Cl, som erhöllos ur den i absorptionsrören befintli-

1) För att tillse, huruvida slamvattnet möjligen hade upptagit något af mineralet, pröfvades detsamma såväl på chlor som, genom afdunstning, på öfriga upptagna ämnen, men visade sig icke hafva utöfvat någon lösande inverkan på mineralets beståndsdelar.

ga ammoniakaliska vätskan utgör 0,2029 gr. Ag-Cl, motsvarande 0,05016 gr. -Cl.

c) Sedan det i öfverskott tillsatta silfret blifvit aflägsnadt genom chlorvätesyra, fälldes lösningen med ammoniak och den urtvättade fällningen behandlades med kalilut i kokning.

d) Den sålunda erhållna lösningen neutraliserades med chlorvätesyra och fälldes med kolsyrad ammoniumoxid. Det glödgade præcipitatet vägde 0,0054 gr. och lemnade vid behandling med chlorvätesyra ett residuum af 0,0021 gr.

e) Den vid kokning med kali olösta återstoden löstes i chlorvätesyra, lösningen neutraliserades med ammoniak och fälldes med bernstensyrad ammoniumoxid. Den med kallt vatten urtvättade fällningen behandlades på filtrum med ammoniakhaltigt vatten, och sedan detta blifvit aflägsnadt genom förnyad tvättning med rent vatten, glödgades densamma och befans väga 0,4718 gr., som vid behandling med saltsyra lemnade en olöst återstod af 0,008 gr.

f) Filtratet efter första ammoniakfällningen c) försattes med vätesvafladt svafvelammonium. Det afskiljda mangansulphuretet urtvättades med iakttagande af nödiga försigtighetsmått, löstes i chlorvätesyra, fälldes i kokning med kolsyradt natron, afdunstades dermed till torrhet och upptogs ånyo med vatten. Den olösta återstoden tvättades och glödgades tills constant vigt erhölls, hvilken utgjorde 0,251 gr.

g) Filtratet efter svafvelmangan försattes med chlorvätesyra och upphettades till utdrifvande af vätesvaflan, neutraliserades derefter med ammoniak och behandlades med oxalsyrad ammoniumoxid. Den afskiljda oxalsyrade kalken öfverfördes till svafvelsyradt salt och vägde såsom sådant 0.0219 gr., hvilket motsvarar 0,009 gr. $\dot{C}a$.

h) Filtratet efter den bernstensyrade jernoxiden e) fälldes med hydrothion-ammoniak; fällningen behandlades på enahanda sätt, som vid f) blifvit angifvet, samt befans väga 0,0574 gr., och lösningen pröfvades med oxalsyrad ammoniumoxid, hvarvid likväl endast spår af kalk visade sig.

i) De i bestämningarne f) och h) erhållna qvantiteterna manganoxidoxidul behandlades gemensamt med chlorvätesyra och gåfvo en återstod af 0,0013 gr. kiselsyra.

Såväl filtratet efter den oxalsyrade kalken g) som det efter svafvelmangan h) pröfvades på talkjord, men i intetdera kunde dess närvaro spåras.

De genom denna analys funna värdena blifva sålunda:

Kiselsyra	a) c) e) i)	0,4796
Jernoxid	d)	0,4638
Manganoxidoxidul	f) h)	0,3071
Lerjord	c)	0,0033
Kalk	g)	0,009
Chlor	b)	0,05016

eller på 100 delar

Kiselsyra	35,59	
Jernoxid	34,41	= 30,[illegible]7 Ḟe
Manganoxidoxidul	22,84	= 21,25 Ṁn
Lerjord	0,24	
Kalk	0,67	
Chlor	3,72.	

II. Decompositionen af mineralet skedde på fullkomligt enahanda sätt, som i det föregående blifvit anfördt, och analysens gång i öfrigt var äfvenledes densamma, med undantag deraf, att ingen särskild bestämning af lerjorden blifvit verkställd, utan denna vägdes tillsamman med jernoxiden.

1,4315 gr. mineral gaf

Kiselsyra	0,5038
Jernoxid, Lerjord	0,5012
Manganoxidoxidul	0,3197
Kalk	0,0116
Chlor [1])	0,05525

eller i procent

Kiselsyra	35,19		
Jernoxid, Lerjord	35,01	34,77 F⃛e =	31,29 Ḟe
		0,24 Äl	
Manganoxidoxidul	22,33	=	20,77 Ṁn
Kalkjord	0,81		
Chlor	3,86		

Vid dessa analyser må anmärkas, att den afskiljda kiselsyrans renhet endast i den sednare blifvit pröfvad genom behandling med kolsyradt natron, och visade sig att densamma upptogs fullständigt af lösningsmedlet, så att endast några ovägbara flockar återstodo. Öfver-

1) Salpetersyrelösningen visade sig vid denna analys innehålla 0,05134 gr., den ammoniakaliska vätskan 0,00391 gr. Cl.

ensstämmelsen mellan de vid begge bestämmelserna funna värdena talar emedlertid för, att äfven vid den första analysen decompositionen varit fullständig..

För öfrigt torde såsom anmärkningsvärdt kunna påpekas det förhållande, som visat sig vid mineralets sönderdelning, att nemligen af de bildade chlorhaltiga produkterna en så ringa del (ungefär 5 % af chlorhalten) förflygtigats, oaktadt decompositionen försiggått vid högre temperatur, och den använda salpetersyran varit temligen concentrerad.

B. Undersökning af Pyrosmalith decomponerad medelst chlorvätesyra.

Mineralets decomposition med denna syra afsåg hufvudsakligen bestämmandet af manganens och jernets ingående oxidationsgrader. Sönderdelningen måste följaktligen försiggå utan lufttillträde, hvarföre densamma skedde uti kolsyre-atmospher och för öfrigt på samma sätt som vid decompositionen med salpetersyra, endast att det med retorthalsen förbundna absorptionsröret innehöll vatten, hvilket här ej hade annan uppgift, än att tjena såsom spärrvätska för att hindra lufttillträde. Saltsyran, som användes, var högst concentrerad och sönderdelningen försiggick med lätthet, så snart retorten uppvärmdes.

Såsom den beqvämaste och användbaraste methoden för bestämmande af jernoxidulhalten valdes titrering med öfvermangansyradt kali. Titre-ställningen af chamæleon-lösningen skedde medelst metalliskt jern, som löstes i chlorvätesyra under iakttagande af nödiga försigtighetsmått, och den erhållna lösningen försattes med en lika stor vattenmängd, som den till mineralets decomposition använda qvantiteten saltsyra behöfde för att vinna den för titreringen nödiga graden af förtunning.

De vigtsqvantiteter jern, som användes till titrens fastställande, varierade emellan 0,19 och 0,21 gr. och mängden af mineralet, som decomponerades, valdes med ledning af de föregående analyserna så stor, att den deri ingående jernqvantiteten ungefär motsvarade den till titre-ställningen använda.

I. Vid första bestämningen, som sålunda anställdes, användes en chamæleonlösning, hvars titre vid tvenne consecutiva pröfningar visat sig vara: 100 C.C. = 1,1174 och 1,116 gr. metalliskt jern. Häraf förbrukades till oxidation af den i 1,014 gr. mineral ingående jernoxidulen 21,4 C.C.; hvilket med stöd af titrens medelvärde antyder närvaron af 0,3086 gr. $\dot{F}e$.

Sedan jernoxidulhalten sålunda blifvit utrönt, företogs en bestäm-

ning af kiselsyran, hvarvid erhölls 0,3612 gr., som vid lösning i kolsyradt natron lemnade en återstod af 0,0016 gr., och med betraktande af denna såsom odecomponeradt mineral utgör den funna kiselsyran 35,51 %.

II. Då emedlertid med den concentrationsgrad, som chamæleonlösningen vid nyssnämnde försök egde, observationsfelen kunde utöfva ett märkbart inflytande, förnyades detsamma med en mera utspädd titreringsvätska: 100 C.C. = 0,644—0,645 gr. metalliskt jern.

Till oxidation af jernoxidulhalten i 1,133 gr. mineral visade sig af denna lösning erfordras 39,6 C.C., hvilket med titrens medelvärde motsvarar 0,3423 gr. $\dot{F}e$.

Beräknade i procent af de använda vigtsqvantiteterna mineral blifva de sålunda funna jernoxidulmängderna

1.	2.
30,43	30,21.

Då dessa försök gifvit nyssnämnde resultater med afseende på det i mineralet befintliga jernets oxidationsgrad, var naturligen all pröfning på manganens syrebindning öfverflödig.

C. Undersökning af Pyrosmalith genom upphettning till högre temperaturgrader.

Såsom redan blifvit omnämndt, hafva alla i det föregående anförda bestämningar utgått från det vid vanlig temperatur i torr luft eller under luftpumpens recipient torkade mineralet; men ehuru detta tillstånd måste anses närmast motsvara det naturliga, syntes det likväl såväl i allmänhet vara af intresse för mineralets kännedom som af speciel vigt för vattenbestämningen att utröna, huruvida Pyrosmalithen i likhet med flera andra vattenhaltiga mineralier vid olika temperaturer afgifver en större eller mindre del af sin vattenhalt.

Ett försök i detta afseende anställdes derföre sålunda, att mineralet upphettades i en ström af torr kolsyregas, hvarvid jemväl var sörjdt för uppfångandet af de flygtiga produkter, hvilka jemte vattenångorna möjligen kunde bortgå. Mineralet utsattes på sådant sätt först för 100° värme under 3:ne timmar, men visade sig efter denna tids förlopp icke hafva aftagit i vigt. Temperaturen stegrades derpå till 150° och slutligen till 200°, utan att likväl någon vigtsförlust gaf sig tillkänna, och mineralpulvret visade vid upphettningens slut fullkomligt samma utseende, som det efter torkning vid vanlig temperatur egde.

I. *1.* Sedan sålunda blifvit utrönt, att Pyrosmalithen icke lider någon förändring vid 100°, företogs vattenbestämningen på sådant sätt,

att mineralet blandades med finrifven blyoxid, som blifvit torkad vid 120° och blandningen ännu varm infördes i ett förbränningsrör, som vidare fylldes med ren blyoxid, hvarefter röret, sedan dess öppna ända blifvit utdragen till en spets, förbands med ett chlorcalciumrör och upphettades så länge, tills inga vattenångor mera visade sig. Sedan derefter torr luft fått stryka genom förbränningsröret, som fortfarande uppvärmdes, bestämdes chlorcaliumrörets vigtstillökning.

Ett sålunda anstäldt försök med 1,0715 gr. mineral, gaf en vattenhalt af 0,082 gr., utgörande 7,65 %.

2. En annan bestämning, företagen för samma ändamål och anställd på enahanda sätt, likväl med den skilnad att i blyoxidens ställe nyss glödgad talkjord användes, visade att 1,092 gr. mineral hade afgifvit 0,0856 gr. vatten, hvilket utgör 7,84 % af mineralens vigt.

Vid begge dessa försök pröfvades det öfvergångna vattnets reaction, men i intetdera fallet kunde fri syra upptäckas.

II. Då jernets chlorbindningsgrader redan vid svag upphettning lätt och fullständigt reduceras af vätgas, under det att alla omständigheter tala för, att den kiselsyrade jernoxidulen endast med svårighet och först vid långvarig och sträng glödgning angripes af detta reductionsmedel [1]), så syntes genom Pyrosmalithens behandling med vätgas

1) Bland försök rörande jernsilikaters förhållande till vätgas, vilja vi här endast omnämna dem, hvilka blifvit gjorda af *Ebelmen* på svart granat från Beaujeux (Annales des Mines 4:me Serie VII. 19. *Berzelius* Årsber. 1846 s. 272), hvarvid han iakttagit, att vid svag glödgning en liten del af den i detta mineral ingående jernoxiden reduceras, en omständighet som möjligen kan bero på mekaniskt inblandad oxid, hvaremot hvitglödgning erfordras för hela jernoxidhaltens öfverförande i reguliniskt tillstånd. Då likväl dessa försök gällde ett silikat af jernoxid, och de föregående bestämmelserna satt utom allt tvifvel att den i Pyrosmalithen ingående kiselsyreföreningen innehölle jernet såsom oxidul, så hafva vi för att kunna bedöma methodens tillförlitlighet och värdet af de resultater, som genom densamma kunna erhållas, anställt försök till utrönande af vätgasens inverkan på jernoxidul-silikater.

För att dessa emedlertid skulle vara gällande med afseerde på Pyrosmalithen, fordrades att de silikater, hvilka underkastades pröfning, egde en sammansättning, som, om den än icke fullkomligt öfverensstämde med det i P. befintliga silikatets, åtminstone icke kunde innebära ett stöd för antagandet, att desamma skulle med större svårighet än detta afficieras af reductionsmedlet. Då vi derföre i saknad af ett fullt lämpligt mineral, hafva anställt ett af våra försök på en färskslagg, har det skett under den förutsättning, att denna såsom ett vida mera basiskt silikat än Pyrosmalithen borde lättare reduceras af vätgasen och följaktligen, om försöket visade, att densamma ej underginge någon förändring, detta så mycket mera borde gälla om den kiselsyrerikare föreningen. Det metalliska jern som finnes inblandadt i färskslaggen kunde naturligen icke utöfva något inflytande såsom sådant, och för att undvika den felaktighet, som möjligen kunde uppstå till följe deraf, att detsamma partielt oxiderat sig,

vid svag glödgningshetta, en bestämning af mineralets vattenhalt kunna erhållas, i det att den dervid uppkommande vigtsförlusten borde motsvara summan af chlor- och vattenhalten och, då den förra blifvit utrönt genom föregående bestämningar, den sednare lätt kunde beräknas.

Vid de tvänne försök, som på detta sätt anställdes, upphettades reductionsröret öfver en Berzeliansk spritlampa till mörk rödglödgning och upphettningen fortsattes så länge chlorvätesyra bortgick och vattenångor afsatte sig, hvarefter röret fick afsvalna i vätgasströmmen och vigtsförlusten bestämdes.

De båda bestämningarnes resultater voro följande:

1. 1,09 gr. mineral gaf en vigtsförlust af 0,12 gr., hvilket utgör 11,01 %, som med afdrag af 3,79 % Cl utvisar en vattenhalt af 7,22 %.

2. 0,8372 gr. mineral visade sig hafva förlorat 0,099 gr. i vigt, motsvarande 11,41 %, som med afdrag af chlorhalten angifver en vattenhalt af 7,46 %.

Efter att sålunda hafva redogjort för enskildtheterna af de olika försök som blifvit anställda, återstår att sammanfatta de särskilda resultaterna, för att derigenom erhålla en öfverblick af dessa och deras inbördes förhållande.

---

utvaldes med omsorg smärre väl flutna partier ur slaggmassans inre och af dessa användes den innersta kärnan. Af det under luftpumpens recipient torkade slaggpulfret användes 1,2644 gr. till försöket. Reductionsrörets upphettning skedde medelst Berzelianska spritlampan och temperaturen stegrades ej högre än till mörk rödglödgning. Efter 1/2 timmas upphettning visade sig en vigtsförlust af 0,0078 gr., hvilket motsvarar 0,61 %.

Ett annat försök anställdes å Arfwedsonit, som efter den äldre uppfattningen (enligt *Kobell*) skulle vara $\dot{N}a\,\ddot{S}i + \dot{F}e^3\,\dddot{S}i^2$. Vid samma behandling, som vid det föregående försöket blifvit angifven, gaf 0,838 gr. af detta mineral en förlust af 0,0057 gr., hvilket motsvarar 1,04 %.

Vid anförandet af dessa försök förbise vi icke, att desamma ej kunna ega ett allmännare e.ler högre värde än såsom en approximativ bestämning af de resultaters tillförlitlighet, hvilka kunna erhållas genom tillämpningen af samma förfaringssätt på Pyrosmalith till utrönande af dess vattenhalt, och om än beskaffenheten af de silikater, hvilka användts till pröfningen, skulle kunna leda till den förmodan, att de vigtsförluster försöken angifva, berott icke så mycket på en reduction af silikatets jern, som fastmera på fremmande inblandningar, så måste methoden likväl såsom vattenbestämning i ett sådant fall som det föreliggande endast betraktas såsom användbar att i viss mon kontrollera de genom directa försök funna värdena.

	A.		B.		C.			
	I.	II.	I.	II.	I.		II.	
					1.	2.	1.	2.
Kiselsyra	35,59	35,19	35,51					
Jernoxidul	30,97	31,29	30,43	30,21				
Manganoxidoxidul	21,25	20,77						
Lerjord	0,24	0,24						
Kalk	0,67	0,81						
Chlor	3,72	3,86						
Vatten					7,65—7,84		11,01—11,41	

Innan vi försöka att ur dessa analytiska data härleda en formel för Pyrosmalithen, torde några ord böra nämnas med afseende på dem af de gjorda bestämmelserna, hvilka, på grund af det närmaste syftemålet med vår undersökning, sådant detta redan vid början af denna uppsats blifvit uttaladt, måste blifva för oss de vigtigaste såsom innebärande de egentliga bidragen till en närmare kännedom om mineralets sammansättning. Hit må i första rummet räknas de försök, som blifvit anställda till utrönande af de ingående metallernas oxidationsgrader, och ett närmare skärskådande af dessas resultater blir derföre nödigt.

Såsom ofvanstående resumé angifver, hafva bestämningarne i detta hänseende utvisat, att endast en ringa del af de i mineralet befintliga metallerna deruti ingår till högre syrsättningsgrad än oxidul, och på goda grunder torde kunna antagas, att den sålunda högre oxiderade metallen är jernet. Denna jernoxidhalt, som i medeltal utgör 0,79 % är emedlertid långt ifrån så stor, att den med hela chlorqvantiteten som mineralet visat sig innehålla, kunnat bilda jernchlorid (3,79 % Cl fordrar nemligen 2 % jern = 2,86 % Fe), hvaraf skulle följa att såväl den högre som den lägre chlorbindningsgraden af jernet skulle förefinnas i Pyrosmalithen. Att emedlertid förhållandet svårligen kan vara sådant, åtminstone i mineralets ursprungliga tillstånd, torde ej behöfva närmare belysas, och det erhållna resultatet måste följaktligen bero antingen på sjelfva bestämningen eller på en förändring, som mineralet undergått. Försökens detaljer hafva redan i det föregående blifvit framlagda, och af dessa torde synas, att all uppmärksamhet blifvit egnad åt förebyggande af felaktigheter vid bestämmelsernas verkställande; skulle emedlertid några sådana hafva insmugit sig tillfölje af ett icke absolut uteslutande af atmospheriska luften under sjelfva sönderdelningen eller vid lösningens utbringande ur decompositionskärlet, så måste dessa alla hafva bidragit till åstadkommande af en

oxidation och sålunda samverkat till det erhållna resultatet med den förändring, som mineralet sjelf möjligen undergått genom atmospheriliernas inflytande; att åter antagandet af en sådan, om än högst ytlig, icke saknar all grund, torde de i det föregående angifna yttre karaktererne utvisa.

Med stöd af dessa förhållanden hafva vi ansett oss böra betrakta den i mineralet ingående chlorföreningen såsom jernchlorur, och såsom sådan upptages den derföre vid beräkningen af Pyrosmalithens formel.

I sammanhang med frågan om jernets oxidationsgrad står äfven den om vattenhalten, så till vida som, med förutsättning att mineralet undergått någon förändring till följe af en partiel syrsättning, äfven ett upptagande af vatten sannolikt varit dermed förknippadt, såsom förhållandet visat sig vara med andra mineralier under samma omständigheter, hvaraf åter skulle följa, att den funna vattenhalten vore något högre än den, som egentligen tillhör mineralet.

I enlighet med hvad ofvan blifvit anmärkt rörande den ingående chlorföreningen och med begagnande af de särskilda bestämningarnes medelvärden blir det egentliga analytiska resultatet följande[1]):

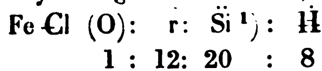
			Syrehalt.	
Kiselsyra	35,43 }		18,39 }	... 18,50
Lerjord	0,24 }		0,11 }	
Jernoxidul	27,29		6,06 }	
Manganoxidul	21,01		4,73 }	... 11,00
Kalk	0,74		0,21 }	
{ Jern	3,00	erfordrar för bildande af	$\dot{F}e$	0,86
{ Chlor	3,79			
Vatten	7,74			6,88
	99,24			37,24

De ur de funna värdena beräknade syrehalterna visa till hvarandra inbördes följande relationer:

0,86 : 11,00 = 1 : 12.79 eller approximativt = 1 : 12.
11,00 : 18,50 = 1 : 1.68 „ „ = 3 : 5.
6,88 : 11,00 = 1 : 1.59 „ „ = 2 : 3.

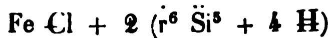
1) De qvantiteter lerjord och kalk, som analyserna utvisa, torde kanske rättast böra betraktas såsom härledande sig från främmande inblandningar, och detta så mycket mera, som de mineralier, hvilka närmast åtfölja Pyrosmalithen, gifva stöd åt en sådan förmodan. Då det emedlertid ej varit möjligt att afgöra, under hvad form dessa ämnen ingå i fossilet, och då de derjemte tillfölje af sin ringa mängd ej kunnat utöfva något väsentligt inflytande vid bestämningen af mineralets sammansättning, hafva vi ansett oss böra upptaga dem i räkningen, enär deras uteslutande möjligen kunnat anses sakna tillräcklig grund.

hvarföre förhållandet mellan constituenternas syrehalter, med det mot jernchloruren svarande syret taget såsom enhet, blir:



$$Fe\,Cl\,(O) : \dot{r} : \ddot{Si}\,^{1)} : \dot{H}$$
$$1 : 12 : 20 : 8$$

och Pyrosmalithens kemiska sammansättning skulle följaktligen uttryckas genom formeln



$$Fe\,Cl + 2\,(\dot{r}^6\,\ddot{Si}^5 + 4\,\dot{H})$$

eller [2]) $$Fe\,Cl + 2\,(\dot{r}^2\,\ddot{Si} + 4\,\dot{r}\,\ddot{Si} + 4\,\dot{H}),$$

hvilken, om kiselsyran betraktas såsom $\dddot{Si}$, antager formen



$$3\,Fe\,Cl + 4\,(\dot{r}^3\,\dddot{Si} + 2\,\dot{r}\,Si^2 + 6\,\dot{H}).$$

Försöka vi att ur dessa formler beräkna de syrehalter, som analysen borde hafva gifvit, så finna vi [3])

$\ddot{Si}$	=	18,146
$\dot{r}$	=	10,887
Fe Cl (O)	=	0,907
$\dot{H}$	=	7,258
		37,198

Det vattenhaltiga silikatet $2\,\dot{r}^6\,\ddot{Si}^5 + 8\,\dot{H}$, som sålunda ingår uti Pyrosmalithen och utgör dess hufvudbeståndsdel, har, betraktadt såsom ett helt, få motsvarigheter; närmast öfverensstämmer detsamma med den derba Skillerspathen från Baste i Radauthal, hvilken *Köhler*

1) Genom *Marignacs* upptäckt af isomorphien mellan fluorsiliciums och tennfluoridens föreningar synes frågan om kiselsyrans atomistiska sammansättning vara afgjord till förmån för den åsigt, som betraktar densamma, bestå af 1 æqu. Silicium med 2 æqu. Syre; då likväl denna kiselsyrans constitution först på sednare tider blifvit mera allmänt antagen, hafva vi vid formlernas uppställande icke velat lemna den äldre uppfattningen alldeles ur sigte och hafva derföre anfört mineralets sammansättning äfven efter denna.

2) Det torde knappast förtjena särskildt anmärkas, att utom den här anförda dubbelföreningen jemväl andra kunna härledas ur den empiriska formeln (till exempel $\dot{r}^6\,\ddot{Si}^5 = \dot{r}^3\,\ddot{Si}^2 + 3\,\dot{r}\,\ddot{Si}$ el. $\dot{r}^6\,\ddot{Si}^6 = \dot{r}^2\,\ddot{Si}^3 + 2\,\dot{r}^2\,\ddot{Si}$) och att, vid valet mellan dessa, företräde blifvit lemnadt åt den, hvars constituenter synts oss vara de enklaste och vanligast förekommande, synnerligast som inga andra bestämningsgrunder funnos förhanden.

3) Dessa värden äro produkter af quotienten 37,24 : 41 och hvardera af talen 20, 12, 1, 8. (37,24 = summan af de funna syrehalterna; 41 = summan af de i formeln ingående syreatomerna, den mot jernchloruren svarande syre-æquivalenten inberäknad.)

undersökt och hvars sammansättning uttryckes genom formeln $2\dot{r}^6 \ddot{Si}^5 + 9 \bar{H}$[1]); äfven Thermophylliten från Hopoowara skulle enligt *Hermanns* analys[2]) innehålla ett silikat af samma mättningsgrad förenadt med 5 at. $\bar{H}$; anses det åter såsom en förening mellan ett singulosilikat ($\dot{r}^2 \ddot{Si}$) och ett bisilikat ($\dot{r} \ddot{Si}$), eger detsamma jemväl analogier uti Gymnit, Hydrophit och Serpentin, hvilka kunna betraktas såsom vattenhaltiga föreningar af dessa begge slags silikater i olika proportioner.

Rörande sättet, hvarpå jernets chlorbindningsgrad ingår uti Pyrosmalithen, hyste man till en början den föreställningen, att densamma endast vore mekaniskt inblandad i silikatet, och vi hafva sett huru denna åsigt föranledde *Hisinger* att antaga närvaron af basisk jernchlorid, hufvudsakligen på den grund, att det i annat fall blefve oförklarligt, hvarföre chlorjernet ej utdrogs af vatten. Samma föreställningssätt tyckes äfven hafva delats af *Beudant*[3]), enär han med antagande af *Hisingers* uppfattning af det ingående silikatet såsom $f\, S^2 + mn\, S'$ ställer Pyrosmalithen i Pyroxenernas klass och anser den endast såsom en varietet af dessa.

Redan *Hausman*[4]) uttalar emedlertid en annan åsigt öfver detta ämne, i det han betraktar jernchloriden såsom Pyrosmalithens karakteriserande beståndsdel och förklarar mineralets olöslighet i vatten, oaktadt närvaron af ett deliquescerande salt, derigenom, att detta i kemisk förening med en öfvervägande mängd silikat förlorat sin löslighet.

Under mineralogiens fortgående utveckling och genom upptäckten af flera med Pyrosmalithen mer eller mindre likartade mineralier, har visserligen denna fråga blifvit afgjord, men på samma gång hafva förhållanden med afseende på haloidsalters föreningar med silikater blifvit lagda i dagen, hvilka svårligen kunna vinna en nöjaktig förklaring genom tillämpning af vanliga kemiska lagar, såsom en blick på Chondroditens, Apophyllithens, Glimmerns och andra fluorhaltiga silikaters sammansättning lätteligen visar.

I anledning af denna sistnämda omständighet anse vi oss icke böra med tystnad förbigå en antydan med afseende på tolkningen af det i Pyrosmalithen ingående chlorjernets föreningssätt, som blifvit gif-

---

1) *Rammelsberg.* "Handbuch der Mineralchemie" s. 532.

2) *Rammelsberg.* "Handbuch der Mineralchemie" s, 524.

3) Jemfr. *Necker:* "La Règne minéral." Paris 1835 T. 2:me p. 425 och *Dufrénoy:* "Traité de minéralogie". Paris 1845 T. 2:me p. 543.

4) Reise in Skandinavien 5 Th. p. 15.

ven af *Scheerer*[1]) i det han, hänvisande på fluorns förhållande och på en möjlig förklaring af detsamma genom antagande af en syrets substitution genom saltbildaren, tillämpar samma antagande på chloren i detta mineral.

Öfver det mer eller mindre berättigade i detta antagande anse vi oss ej tillständigt att här uttala ett omdöme, så mycket mindre som en närmare granskning deraf ligger helt och hållet utom gränsorna för denna uppsats; likväl vill det synas, som om de stora svårigheter, hvilka för närvarande möta vid förklaringen af den vexlande fluorhalten hos många silikater, skulle i betydlig grad undanrödjas genom detta betraktelsesätt; och då i dessa mineralier jemte fluorn ej sällan chlor ingår (t. ex. i många glimmerarter), så måste hypothesen, i händelse den visar sig gälla för den förra, äfven erhålla betydelse för den sednare.

Af rent chlorhaltiga silikater är hittills ett så ringa antal funnet, att dessa svårligen kunna läggas till grund för ett bedömmande af hypothesens värde och tillämplighet, och om än inom kemiens område det ej saknas föreningar, hvilka tillåta en sådan tolkning som den ifrågavarande (vi erinra om $K\,\text{Cl} + 2\,\dddot{\text{C}}\text{r}.\,K\text{I} + 3\,\dddot{\text{A}}\text{s}$ m. fl.), så torde likväl ännu icke några positiva bevis för dess riktighet vara gifna.

Lägga vi emedlertid denna uppfattning till grund för en beräkning af de genom analysen funna värdena på Pyrosmalithens beståndsdelar, med iakttagande derjemte af vattnets och lerjordens polymer-isomorphi, så blir förhållandet mellan $\dot{r}$ och $\ddot{\text{S}}\text{i}$ följande:

$$[(\dot{r})] : [\ddot{\text{S}}\text{i}] = 14{,}15 : 18{,}46 = 1 : 1{,}304 = 3 : 3{,}91$$

och mineralets formel $[(\dot{r})]^3\,[\text{Si}]^2$

eller, om kiselsyran betraktas innehålla 3 at. syre

$$[(\dot{r})]^9\,[\ddot{\text{S}}\text{i}]^4 = 2\,[(r)]^3\,[\ddot{\text{S}}\text{i}] + [(\dot{r})]^3\,[\ddot{\text{S}}\text{i}]^2$$

hvilken sistnämda är samma formel som *Scheerer*[2]) för Schillerspathen härledt ur *Köhlers* analyser.

1) *Liebig*, *Poggendorff* u. *Wöhler:* Handwörterbuch der reinen u. angewandten Chemie, red. von *Kolbe*. Bd VI. Braunschweig 1854 s. 709. art. Pyrodmalith.

2) *Liebig*, *Poggendorff* u. *Wöhler:* Handw. d. Chemie. Bd IV, 1849. s. 184.

Bidrag
till Svenska Stadsförfattningens Historia

af

C. T. ODHNER.

I. Öfversigt af Svenska städernas författning före den Allm. Stadslagen.

Det Svenska stadsväsendet, som i sitt senare skick är en skapelse af de mest olikartade elementer, företer i sitt ursprung och första utvecklingsstadium en bild af den största enkelhet: det har framgått med otvungen bildning ur den ostörda civilisationsprocessen inom ett naturenligt och friskt folklif. De första spåren af ett begynnande stadslif pläga tidigt visa sig hos folk, bland hvilka lagbunden ordning och stadgadt samhällsskick af ålder äro bofaste. Derföre kunna flera af våra äldsta städer räkna sina anor ända långt in i den grå sagotiden, och vid den tid, då våra Germaniska stamförvandter på kontinenten, våra blifvande läromästare i de fredliga idrotterna, ännu lefde som halfnomader i Tysklands skogar och enligt Tacitus skydde alla "junctas sedes", funnos måhända redan hos oss ordnade samhällen med bestämda medelpunkter för gemensam gudstjenst och rättsskipning samt thy åtföljande handel eller varubyte. Förhållandet i all sin enkelhet beskrifves af Olaus Petri så, att "hvar landsände hafver haft sin besynnerliga marknadsstad, hvilken de kallade köping: der hafva bönderna kommit tillhopa och bytt deras varor, som här inrikes föllo och gjordes, och gåfvo vara för vara" 1) o. s. v. Att denna första och enklaste kommerciella beröring hos ett ordnadt och bofast folk tidigt nog skulle framkalla särskilta näringsgrenar och vissa med omsättningen sysselsatta yrken, säger sig sjelft, hvarföre man redan vid sago-

1) Olai Petri Krönika utg. af Klemming 1860 ss. 41, 42.

tidens slut finner en och annan *egentlig* köpstad omtalas i vårt land. Man skulle till och med kunna tänka sig, att städer sådana som Birka, Kalmar, Liodhus, tidigt i mångsidig beröring med utlandet, redan nu genom en skild ordning varit afsöndrade från landsbygden: man saknar dock helt och hållet underrättelser derom [1]). Några direkta impulser utifrån kunde dock ännu ej komma i fråga, ty handelsgebietet inskränkte sig väl till länderna kring Östersjön, der inga egentliga städer ännu blifvit anlagda. Annat var förhållandet med de äldsta Danska och Norska köpstäderna: de förra kommo tidigt under inflytande af Tyska sedvänjor, de senare af Engelska. Dels fick gilleväsendet hos dem tidigt insteg [2]) och blef en mäktig häfstång till städernas lyftande, dels började snart konungarne, synnerligen i Norge, att anlägga samt efter utländska mönster privilegiera och inrätta köpstäder [3]). Intetdera inträffade i Sverige: dess städer fingo länge utveckla sig helt och hållet för sig sjelfva och utan någon pådrifvande inflytelse utifrån — såvida man ej vill räkna Kyrkan som en sådan. Sannt är väl, att flera städer genom henne erhöllo stark tillväxt och att några till och med hafva henne att tacka för sitt upphof, men något nytt uppslag, något ferment till nya bildningar gafs genom henne ej åt våra städer, utan allt fortfor att gå sin lugna ostörda gång. Förhållandet bildar en skarp kontrast till det samtidigt snabbt uppväxande stadsväsendet i Tyskland: hos oss framstodo städerna af sig sjelfva såsom frukter af ostördt om ock långsamt framskridande civilisationsarbete, i Tyskland åter var det i allmänhet just bristen på ordning och lag, på frid och rättssäkerhet, som framtvingade stadsväsendet, hvilket derföre också utväxte till sådana proportioner, att det slutligen sprängde det gemensamma enhetsband, som förenade delarne med det hela eller staten, och ställde sig utom den senare såsom en abnorm samhällsbildning. Härigenom framkallades mellertid en yppig växtlighet: stadslifvet fick der en rörlighet, mångsidighet och glans, hvaraf Norden knappt kunnat framvisa en matt skuggbild. Liksom samhällsbildningen i allmänhet hos oss

1) De äldsta spåren till en stadsstyrelse af Skandinaviskt ursprung finnas i de af Danskar bebodda nordliga städerna i England under 900-talet, der municipal-förvaltningen tillhörde 12 s. k. Laghamän: se Lappenberg Geschichte von England I, s. 612.

2) Det framträder i Norge redan i senare hälften af 1000-talet, i Danmark omkring 1100: se Munch Det Norske Folks Hist. II, s. 441 och Allen Danm. Hist. (5:te Udg.) s. 94—7.

3) Deri utmärkte sig isynnerhet de vidtbereste och om främmande seder väl underkunnige Olof Tryggvason, Sigurd Jorsalafarer m. fl.

har framgått med ett lugn, som man ansett för långsamhet, med en naturlighet och enkelhet, som man ofta förblandat med ensidighet och brist på inneboende lif eller ändamålsenliga former, så har äfven fallet varit med en af hennes vigtigaste frukter, nemligen stadsväsendet. Mellertid hade sålunda de Tyska städerna hastigt öfverflyglat sina Nordiska medtäflare: bladet hade vändt sig om, och det var omsider derifrån, som de Svenska städerna mottogo en väsendtlig faktor i sin senare utveckling.

Redan dessförinnan hade de likväl tagit flera vigtiga steg på banan: man torde kunna antaga, att 1100-talet för Svenska städerna varit det tidskifte, som förberedt deras sjelfständighet såsom egna och från landet skilda samfund. Innevånarnes antal ökades med näringskällornas tillväxt: deras sysselsättningar blefvo allt bestämdare skilda från landets: nya politiföreskrifter och ordningsstadgar samt äfven förändrade rättsbestämmelser blefvo önskvärda och nödvändiga. De yttre skiljetecken, som utmärkte staden från landet, såsom det närmare samlifvet, det olika lefnadssättet o. s. v. började derföre framkalla äfven inre olikheter: städerna begynte småningom bryta sig fram ur de territoriala rättsområdena, för att snart *jemte* dessa stå sjelfständiga inför den högsta makten. En sådan utbrytning innebar inga svårigheter i ett land, der nya oberoende rättssamfund alltifrån hedenhös bildat sig det ena bredvid eller under det andra. Man tänke sig saken ungefärligen så: ett stadssamhälle har småningom och oförmärkt genom omständigheternas egen makt dragit sig undan häradstinget [1]) och börjat tillämpa lagen inom sitt område ungefär på samma sätt som förut på tinget skett d. v. s. genom menighetens eget utöfvande af rättsskipningen. Analogier härför finnas både i de Danska städerna, der dylika Bything började hållas under 1100-talet [2]), och i de Nordtyska, särskilt Lübeck, der jurisdiktionen först utöfvades af hela menigheten på deras "echte Dinge" eller placita [3]). Då nu landsrätten började tillämpas i städerna med deras egendomliga förhållanden, så uppstod af sig sjelf en modifikation af densamma, och liksom all lagstiftning

1) I Tyskland var det Kejsarne, som frigjorde städerna från det allmänna Grefvebannet, i det de tillsatte öfver dem särskilta Riksfogdar. Så började äfven våra Konungar göra längre fram under 1300-talet.

2) Jmfr Allen a. st. s. 154. Ännu enligt Lunds stadsrätt af 1361 utöfvades jurisdiktionen af borgarne sjelfva. Se Kolderup Rosenvinge Saml. af gamle Danske Love V, p. 64—83.

3) Se Frensdorff Die Stadt- und Gerichtsverfassung Lübecks im XII und XIII Jahrh. p. 42. Något dylikt egde äfven rum i de Anglosachsiska städerna: se Lappenberg a. st. I, s. 615.

under Medeltiden blott var en fixering af gällande rättsförhållanden, så blef det här blott fråga om att afpassa lagstadgandena efter de i städerna sedan länge herrskande sedvänjorna. Någon administration i egentlig mening förekom väl ännu ej, men de första spåren af en sådan måste naturligtvis tidigt visa sig inom folkrikare och närmare slutna samhällen, der vissa gemensamma angelägenheter blott af några få kunna bestyras och derföre ordningsmän måste utses till deras förrättande. Dessa voro dock ingenting annat än vanliga medborgare, utan någon egentlig och stadgad embetsmyndighet [1]).

Vi se häraf, att våra städer, liksom våra öfriga fria kommunalsamfund, i början framträdde med stark demokratisk hållning. Konungamakten torde ännu föga befattat sig med städerna: hon var vid denna tiden för mycket i sin linda, för litet medveten om sitt mål för att aktgifva på stadsväsendet eller ifra för dess utveckling. För öfrigt finner man icke på regentlängden före Birger Jarl någon egentlig organiserande förmåga. Det är väl icke otänkbart, att en och annan Biskop vidtagit några åtgärder för sin stiftsstads förkofran eller till och med meddelat honom vissa privilegier, men man kan derom blott framställa gissningar. Ej heller har veterligen någon Svensk regent före Birger Jarl egnat städerna och deras näringar någon synnerlig uppmärksamhet. Fogdemakten framträdde först vid denna tid [2]) i Svenska städerna, under det i de Norska Konungens Fogdar eller Gjaldkere omtalas redan under Sigurd Jorsalafarer [3]), och i Sverige är det först omkring år 1250, som vissa städer i offentliga handlingar förekomma under den utmärkande benämningen civitates, villæ forenses [4]). Dermed menades utan tvifvel sådane städer, hvilka redan länge utgjort sjelfständiga samhällen med egna rättssedvänjor [5]), som visserligen i det hela öfverensstämde med landsrätten, men i följd af vissa

1) Här förtjenar anmärkas, att äfven i Lübeck Rådet i början uppträder under den anspråkslösa benämningen cives lubicenses. Consules förekommer der ej förr än 1201: Frensdorff a. st. s. 41.

2) Detta embete omnämnes ej uttryckligen i urkunderna förr än sista decenniet af 1200-talet, men då det i BjärköaRätten omtalas såsom förut befintligt, kan man väl våga hänföra dess uppkomst till medlet af seklet.

3) Munch a. st. II, s. 990.

4) Se Dipl. Sv. N:is 376, 404, 600, 611, 989 m. fl. Ang. dessa båda latinska benämningar se Förf:s Bidrag till Svenska städernas och Borgareståndets Historia s. 16, n.

5) Att så verkligen var fallet, kan man äfven sluta af senare handlingar från slutet af 1200- och början af 1300-talet, der det talas om *gamla* rättsprivilegier, consvetudines approbatæ o. s. v. Se Dipl. Sv. 3019, 3126 m. fl.

modifikationer bildade ett slags supplement till densamma. Förmodligen voro dessa lagsamlingar för städerna någonting likartadt med de Norska Bjarkörätterna, hvaraf man ännu har qvar ett exempel i den äldre Bjarkörätten för Nidaros, utgörande ett bihang till den gamla Frostathingslagen [1]).

Från och med Folkungarnes regeringstid begynner ett nytt tidskifte för Svenska städerna. Tvenne nya förhållanden inträdde vid denna tid, hvilka hvar för sig blefvo af en djupt ingripande betydelse för deras utveckling. Det ena var den lifliga beröring med de Tyska städerna och särskilt Lübeck, som nu började, det andra var den starka tillväxt, som Regeringsmakten erhöll under de 50 år, då Birger Jarl, Magnus Ladulås och Torkel Knutsson förde tömmarne, en tillväxt, som snart satte denna makt i närmare beröring äfven med städerna. Genom inflytande af dessa båda krafter finna vi snart de mer betydande städerna i besittning af både Råd och Kunglig Fogat. Rådet sådant det framträder både i Bjärköarätten och Allmänna Stadslagen är af omisskänneligt Tysk härkomst och bildning, såsom på en gång administrerande och dömande myndighet. Men oaktadt det Tyska inflytandet visserligen redan i slutet af 1200-talet var ganska starkt, vore det likväl förvånande, om det gamla Svenska rättegångssättet genast försvunnit utan spår af delvis fortfarande tillvaro, om det utan motstånd lemnat rum för det nya. Så har, enligt vår åsigt, icke heller varit fallet: det nya elementets fullständiga seger föregicks af en tid, då öfvergång och vacklande mellan båda systemen var det förherrskande. Våra skäl äro följande. Då rättegångssättet i städerna till en början gestaltade sig efter landets, så uppkom der sannolikt en inrättning motsvarande landsrättens nämnd, ett utskott för att värja eller fälla den anklagade och längre fram för att pröfva och ransaka species facti, att utsäga "hvad det var sannt om." Spår härtill saknas icke. Så finner man, att Magnus Ladulås 1288 stadfästat åt Jönköpings innevånare "deras gamla statuter och privilegier att lag gå eller ed göra med 12 män, item med 6 män och, om behof göres, med 24" [2]). Ur en sådan edgärdsmannanämnd har domstolsnämnden uppkommit i vår rättsförfattning, och dessa båda kunna ej alltid i landskapslagarne åtskiljas [3]). Då härtill lägges, att i Bjärköarätten

1) Keyser og Munch, Norges gamle Love I, p. XI o. s. 303. Den äldre Bj.R. utgör egentligen blott en samling fragmentariska anteckningar rörande de punkter deri stadsrätten afvek från landsrätten.

2) Dipl. Sv. 3019.

3) Se Schlyter Juridiska Afhandl. s. 220—21; Nordström Sv. Samh.förf:s Historia II, s. 784.

Rådet flerstädes omnämnes såsom edgärdsnämnd[1]), alldeles som med landsrättens nämnd var fallet, samt att man ännu 1349 (i Jönköping) finner den dömande och administrerande myndigheten skilda och den förra representerad af en nämnd[2]), så synes man ha fulla skäl att antaga, det stadsdomstolen till en början var organiserad efter Svenskt mönster, hvilket på sina ställen torde fortfarit ända till Allm. St.L:s utfärdande; det Tyska inflytandet har således först modifierat och slutligen (i St.L.) nästan omdanat detta rättsväsende. Häraf blir dock en följd, att ett ursprungligen Svenskt element ingick såsom bidragande i Rådets bildning[3]).

Det Tyska elementet infördes småningom af Hanseaterna. Den Lübska rätten var vid denna tid i det närmaste färdigbildad och hade blifvit antagen i de flesta Östersjöstäder, Rostock, Wismar, Stralsund, Wisby m. fl. och äfven i Hamburg var han hufvudsakligen gällande. Hvad var då naturligare, än att han äfven begynte sträcka sitt inflytande till de Svenska sjöstäderna, i hvilka hastigt ett stort antal Tyskar fingo insteg, medförande Tyska grundsatser och rättssedvänjor? Snart får man äfven från våra städer höra talas om advocatus, magister burgensis, consules och communitas civium, benämningar alla hämtade från Tyskland[4]). Den i de Tyska städerna numera herrskande friheten och oberoendet af all öfverordnad myndighet lät af många skäl ej fortplanta sig på Svensk jord: oafsedt våra städers obetydlighet, var centralisationen hos oss ännu i stigande, medan hon i Tyskland snart sagdt hade upphört att verka. Härigenom fick stadsförfattningens utveckling i Sverige en helt annan riktning och gång än i mönsterstäderna. I dessa utgjorde Fogdemakten utgångspunkten och häfstången för vinnande af egen jurisdiktion, i början sekunderad af en i alla ärender deltagande menighet: från 1200 begynte båda dessa makters inflytande att alltmer aftaga, för att lemna rum åt ett Aristokratiskt, allt centraliserande Råd. Ett sådant blef visserligen efter Tyskt mönster äfven i de Svenska städerna inrättadt, men på samma gång växte Konungamaktens inflytande på städerna, hvarjemte det demokratiska elementet aldrig utplånades, utan städse fortlefde för att längre fram ytterligare utbildas.

De urkunder, vi hafva att tillgå, omtala ej något Råd i städerna

1) Bj.R. (Schlyters uppl.) fl. 12, 14.

2) se sid. 126.

3) Jmfr förhållandet med den Anglosachsiska vittnesnämnden, hvarur Rådet i de Engelska städerna möjligen uppkommit: Lappenberg a. st. I, s. 615.

4) Jmfr Frensdorff a. st. s. 85 och Hegel Geschichte der Städteverfassung von Italien II, s. 416 ff.

såsom en fast och stadgad myndighet förr än 1288, då Magnus Ladulås tillstadde Jönköpings innevånare "att utvälja sig 12 män i staden, hvilka kallas Rådmän, efter hvilkas råd och försyn all staden sig efter rätta skall." Nya skulle utväljas hvarje år, och dessemellan ingen afsättas, "utan det ske kan genom vår försyn." Rådets funktion var blott en lägre politi-myndighet, med skyldighet att hålla hand öfver ordningen i staden samt att fasttaga och fängsla brottslingar [1]). Ehuru, som förut är nämndt, dylika ordningsmän enligt sakens natur redan tidigt blifvit valda af stadsinnevånarne, så torde dock väl utländska mönster hafva föresväfvat Konungen, då han sålunda upprättade ett särskilt af Statsmakten beroende och bemyndigadt Råd, med bestämda skyldigheter. Här hafva vi måhända första uppslaget till det Tyska Stadsråd, som vi finna färdigbildadt i St.L. Med denna politi-myndighet, hvilken öfverallt i Tyskland var Rådets utgångspunkt och första befattning, förenade sig snart en viss lägre jurisdiktion, som blef ett nödvändigt supplement till den förstnämnda: af Rådets befattning med stadens utskylder och jordområde följde snart skyldigheten att utfärda fastebref, slita egendomstvister [2]) o. s. v. Slutligen började på flera ställen hela jurisdiktionen öfverlåtas åt Rådet, i det att den Svenska domstolsnämnden småningom öfvergick till ett Tyskt i all dom deltagande rättskollegium. Och som detta först framträder i Bjärköarätten, var det ett vigtigt steg i städernas utvecklingsgång som togs, då i sammanhang med landskapslagarnes öfverseende och ordnande äfven en revision kom till stånd af de olika stadssedvänjorna, hvars frukt blef den s. k. Bjärköarätten.

Sannolikt har denne ej blifvit utarbetad förr än vid Uplandslagens utfärdande [3]), ty det var efter landslagen som stadsrätten måste lämpas. Dervid har man företagit sig att först uppsätta en dylik för Stockholms stad såsom den mest betydande, för att sedermera göra behöfliga förändringar och tillägg, då densamma skulle tillämpas för andra landskapers städer. Att Stockholms stadsväsende lades till grund och togs till mönster, är lätt förklarligt dels deraf att de för köpstäderna karakteristiska förhållanden der uppnått den högsta utbildning, dels deraf att Stockholm numer var Konungens residens och derföre låg honom närmast om hjertat. Mellertid har denna lag icke blifvit allmänt gällande i Sveriges städer, ehuru visserligen hans stad-

1) Dipl. Sv. 3019.

2) Ex. från Söderköping 1293, Stockholm 1296 Dipl. Sv. 1092, 1179.

3) Schlyter föret. till Bj.R. pp. XXXII—XXXVII. Härmed bör jemföras förhållandet med den Norska Bjarkörättens nyare upplaga af 1276: Munch a. st. IV, s. 570.

ganden torde hafva inverkat på de fleste: att han längre fram (senast 1345) äfven antagits för Lödöse och möjligen andra Vestgötastäder, har man skäl att antaga, äfvensom att han (ej långt efter 1327) såsom ett supplement till Södermanlandslagen [1]) likaledes gjort sig gällande i detta landskaps städer. Att dock området för hans giltighet aldrig blifvit särdeles vidsträckt, kan man sluta dels deraf att han icke omnämnes i de sedermera utfärdade stadsprivilegier [2]), dels af det tillståndsbref, som 1349 utfärdades till Jönköpings borgare att få begagna samma lag och rätt, kallad Byærkerätt, som *Stockholms* borgare [3]). Huru härmed må förhålla sig, säkert torde dock vara, att Bj.R. varit afsedd och beräknad för flera städers begagnande och att han temligen tillförlitligt, om ock ofullständigt och knapphändigt, angifver den ståndpunkt, som stadsväsendet i det hela vid samma tid uppnått.

Granska vi närmare Bj.R:s innehåll, så finna vi till en början, att hans flesta stadganden tillhöra civil- och kriminalrättens område, under det författningen ej närmare bestämmes, utan blott upptages såsom faktiskt gifven. Denna korthet och ofullständighet rörande en så vigtig punkt är för öfrigt en brist, som Bj.R. delar med de flesta äldre Stadsrätter både Skandinaviska och Tyska, t. ex. den gamla Norska Bjarkölagen, den äldre Lübska, Hamburgska, Goslarska m. fl. [4]). Mellertid ser man, att flera Svenska städer någon tid varit försedde med Fogat, Borgmästare och Råd, eftersom de omtalas såsom redan befintliga. Dessa myndigheter, hvilka enligt det föregående äro dels af Svenskt dels af Tyskt ursprung, intaga just i följd deraf en temligen obestämd och sväfvande ställning, hvilket isynnerhet gäller om Rådet. Fogdemakten, som i Lübeck redan fått en ganska underordnad plats [5]), intog enligt Bj.R. främsta rummet i stadens styrelse, af naturliga skäl. Hvad beträffar Borgmästare-embetet, så omtalas visserligen i Bj.R. flera Borgmästare [6]), men blott på ett ställe och på

---

1) Se Schlyters anf. företal p. XXXVI. Den Södermanländska Bj.R. synes varit temligen afvikande.

2) För Thorsharg 1317, för Wexiö 1342 m. fl. Dipl. Sv. 2097, 3624.

3) Handl. rör. Skand. H. XXXII, s. 372. Detta skulle till och med kunna föranleda det antagande, att Bj.R., om ock afsedd för andra städer och derföre vidfogad vissa Landskapslagar, dock aldrig fått gällande kraft för någon mer än Stockholm. Eljest hade väl Jönköpings borgerskap åberopat flera exempel och isynnerhet Lödöse, som just var deras stapelort enl. D. S. 3351.

4) Frensdorff a. st. s. 101.

5) D:o d:o s. 85—89.

6) Bj.R. fl. 21. Borgmästare-embetet förekommer redan i den Soest'ska Stads-

ett sådant sätt, att de synas allenast varit ordförande utan någon särskilt myndighet dessutom [1]). Rådets antal har varit temligen stort, ty det talas i Bj.R. om en särskilt ur Rådet deputerad nämnd af 12 Rådmän [2]). Det uppträder merändels såsom med Fogden förenadt i en enda korporation. Af de knappa antydningarne kan man sluta, att Fogde och Råd innehade både en dömande och en administrerande myndighet. Den förra utöfvades "i sitiændi raþi", sannolikt blott på de allmänna byathingen eller byamoten [3]), der äfven uppbud å gårdar skedde, fastebref utfärdades m. m. Men som landsrätten ännu ej förlorat sitt fotfäste inom städerna, finner man, att Rådet, ehuru i vissa fall utgörande ett domarekollegium ungefär sådant som de i några Tyska städer förekommande Schöffen, dock i andra mål ännu uppträdt såsom Nämnd både i dulsmål och nämndamål [4]). I vissa svårare kriminalmål voro nemligen blott Rådmän fullgiltiga värjesmän, eljest användes dertill en sex- eller tolf-mannanämnd af byamän [5]). Att den egna jurisdiktionen ännu var i sin utbildning, finner man af de oformliga och obestämda stadgandena om vad, hvilket kunde ske både under annan köpstad och under biskopens eller annan skrifven rätt [6]). Man synes ej rätt veta, hvart den nya domstolen bör henföras. Flera från landsrätten afvikande lagstadganden måste naturligtvis förekomma: så voro t. ex. arfs- och egendoms-förhållandena i staden af annan beskaffenhet än på landet [7]) straffbestämmelserna för hvarjehanda förbrytelser måste i följd af det närmare umgänget och de ökade frestelserna skärpas o. s. v. — Den administrativa funktionen framhålles lika knapphändigt: Fogde och Råd skulle hafva uppsigt öfver brobyggnader och renhållning [8]), öfver vinhandel, mått och vigt [9]).

---

rätten (fader till den Lübska, från medlet af 1100-talet), vidare såsom tillfällig befattning i de Schwerinska stadsrätterna (början af 1200-talet), men af de med Lübsk rätt försedde städerna voro vid Bj.R:s utfärdande blott Lübeck och Hamburg i besittning deraf. Se Hegel Städteverfassung II, s. 445, 455; och Frensdorff a. st. s. 85. I de Danska städerna förekommer det ej förr än efter medlet af 1300-talet: Kolderup Rosenvinge Dansk Retshistorie I, s. 103.

1) Hvilket äfven visar sig af flera urkunder i Dipl. Sv. Deras enda företräde var större andel af vissa böter fl. 21. Äfven Fogaten åtnjöt samma förmån fl. 14, 21.

2) Bj.R. fl. 12.

3) D:o fl. 1, 21, 22. Äfven "Rastudwa" förekommer, fl. 22.

4) Bj.R. fl. 12, 14. — Ang. ofvannämnda mål se Schlyter Jurid. Afhandl. s. 215.

5) D:o fl. 3, 11—14, 38.

6) D:o fl. 4, 7.

7) Bj.R. fl. 24, 25.

8) D:o fl. 41.

9) D:o fl. 38.

De voro försedda med underordnade biträden och voro genom högre viten skyddade för missfirmande [1]). För sin tjenst åtnjöto de ingen annan förmån än en viss andel af böterna [2]). — Fastän nu koncentrerandet af en så vidsträckt myndighet hos Fogden och Rådet innebar ett stort steg i Aristokratisk rigtning, och detta drag möjligen blef ytterligare utbildadt i de större städerna vid kusten, som lättare mottogo impulser från de numer aristokratiskt organiserade Lübska städerna, så har dock utan tvifvel menigheterna fortfarande utöfvat ett stort inflytande på de flesta ställen, hvilket äfven antydes i BjR.

Samma obestämdhet och dunkelhet, som är ett utmärkande drag för Bjärköarättens stadsförfattning, herrskar äfven rörande detta ämne i alla offentliga handlingar under följande halfsekel ända till St.L. utgifvande. De slutsatser som kunna dragas af de spridda urkunder, som finnas qvar, äro i korthet följande. — I följd af Tyskarnes växande inflytande och småningom vunna insteg i alla betydligare stadssamhällen, träffar man nu mer öfverallt en bestämd kommunalmyndighet, ehuru på olika sätt framträdande på olika ställen. Fogden och Rådet förekomma oftast, någongång Borgmästare och universitas civium: ofta felas någon eller några af dessa [3]). I Jönköping finner man år 1349 en ganska egendomlig organisation: en kungl. förordning för denna stad föreskrifver, att vissa böter skulle utkräfvas af Tolfmännen (de af Magnus Ladulås anbefallte 12 Rådmännen?), Fogden, utsedde män af borgarne samt 2 pålitlige män af Konungens större nämnd [4]). Det kan sättas i fråga, om med den senare verkligen menas räfstetingsnämnden eller om dermed betecknas stadens särskilta domstolsnämnd, hvilken fått heta Kunglig på den grund, att städerna nu mer voro underkastade Konungens speciella uppsigt. — Gilleväsendet, som under samma tiderymd genom Tyskarne började utbildas i Sverige, har dock ej lemnat några spår efter sig i den egentliga stads-

---

1) Bj.R. fl. 11, 12, 21.

2) Af dessa tillföll en del staden: fl. 14, 21. Stadens förnämsta inkomst var väl eljest den redan från 1276 omnämnda byargälden, sannolikt samma pålaga, som det sedan förekommande skottet.

3) Så finner man i Linköping 1300 universitas civium, 1303 advocatus et consules, 1307 blott consules såsom den lagliga myndigheten (D. S. 1322, 1386, 1532). Detta kan sålunda förklaras att, då de juridiska formerna ännu voro i hög grad sväfvande, en del af stadsstyrelsen utfärdat dokumenter med samma kraft och verkan som hans plenum. — Fogatembetet har stundom utöfvats af flera för samma stad (D. S. 3026), stundom af en enda gemensamt för flera städer. (För Stockholm och Enköping 1327, se Peringsköld Monum Upl. p. 71, 73.)

4) Handl. Skand. Hist. XXXII, S. 373.

författningen: hos oss hvarken behöfde eller kunde det spela samma rol som i många Tyska städer, neml. den af ett kraftigt vehikel för de lägre klassernas lyftande.

Ett annat förhållande, som nu först inom stadslifvet framträder, är skilnaden mellan priviligierade städer och blotta handelsplatser. Förut var det blott naturens anvisning och rörelsens riktning, som bestämt skilnaden mellan land och stad: saken hade utvecklat sig af sig sjelf: gammal häfd eller nyvaknade behof voro tillräckliga rättsgrunder, och den faktiska tillvaron af en betydligare handelsort hade småningom förskaffat densamma vissa rättigheter. Nya åsigter om konungamagten, exempel från främmande länder samt äfven behofvet af ökade inkomstkällor hade vid denna tid ändrat förhållandet: nu erfordras kungliga bref såväl för fritt idkande af köpenskap, som för utöfvande af egen jurisdiktion. En del städer hade redan uppnått en så hög ståndpunkt, att deras rättigheter allenast ansågos behöfva kunglig bekräftelse [1]). Dessa förekomma under namnet "civitates licitæ et notabiles" [2]); åter andra urgamla ehuru ringare handelsplatser såsom Thorsharg och Wexiö blefvo genom särskilta privilegier benådade med stadsrätt. Från den förra hade klagomål inkommit, att dess innevånare ej fingo åtnjuta "pari et communi jure cum aliis villis huiusmodi et regni civitatibus", hvarföre dem tilldelas alla "jura civitatum et villarum" [3]). Likaledes säges om Wexiö 1342, att det förut "hafver ej varit köpstad", men nu benådas "med sådana privilegier, frälserätt och nåd, som andra njuta i rikets köpstäder" [4]). Hvari dessa jura civitatum egentligen bestodo, beskrifves ej närmare: deri inbegripas väl, utom handelsfriheten, äfven vissa rättigheter i afseende på kommunalstyrelse och rättsförhållanden. Dit hörde väl bland annat frihet att följa vissa egna rättsbruk och lagsamlingar. En sådan särskilt lagsamling torde kanske betecknas genom det någongång förekommande uttrycket leges civiles [5]).

Slutligen hafva vi att för denna tiderymd anmärka en inom några betydligare städer framträdande skilnad mellan befolkningens elementer, mellan de näringsidkande och handlande samt öfrige stadsinnevånare, och en häraf föranledd sträfvan att närmare bestämma de förres rättigheter och skyldigheter. Vi skola längre fram återkomma

---

1) Så Upsala, Jönköping m. fl.
2) Dipl. Sv. 2027.
3) Dipl. Sv. 2097.
4) Dipl. Sv. 3624 Jmfr. Linnæus de Wexionia Lund 1743.
5) Dipl. Sv. 2489.

till denna punkt, för att då i sammanhang med det följande kunna behandla densamma.

II. Svenska städernas författning, från Stadslagens utfärdande intill 1619 års stadga.

Det Svenska stadsväsendet närmast före StadsLagens utfärdande företer en hög grad af obestämdhet och förvirring. Deri förefanns en blandning af Svenska och Tyska elementer, bland hvilka de senare började få öfverhand, vidare en blandning af sedvänjerätt och skrifven lag, ändtligen äfven en blandning af landsrätt och stadsrätt, ty det lider intet tvifvel, att ju en del af de mindre handelsplatserna, isynnerhet de nyare, ännu voro underordnade den förra. Hvad som således behöfdes, var en enda gemensam lag, der alla dessa olikartade faktiska förhållanden voro med hvarandraa koncilierade och sammanarbetade till ett helt, der Tyskarnes faktiska inflytande erhöll laglig form och bestämda gränser, der de enskilta sedvänjorna och rätterna vunno tillbörligt erkännande och rum för en ändamålsenlig utveckling af de lokala egenheterna. Anledningen och grundvalen till denna gemensamma lagstiftning för städerna gafs genom den 1347 utgifna allmänna Landslagen, hvilken snart efterföljdes af den nya allmänna Stadslagen [1]). Denna lag kan betraktas ur tvenne synpunkter: han har å den ena sidan för sitt upphof att tacka de särskilta yrken och sysselsättningar, hvilka skapade städerna och ännu utgjorde deras enda eller åtminstone konstitutiva element, för dessa och inga andra är han beräknad, han utgör följaktligen ett vigtigt moment i Svenska ståndsförfattningens historia och framstår ur denna synpunkt såsom en Ståndslag, hvarigenom Svenska Borgareståndet för första gången framträder såsom en ordnad samhällsorgan. Men som detta stånd i anseende till

1) Tidepunkten för hans utfärdande har jag i anf. Bidrag sökt bestämma till åren 1350—57 ss. 23—4 n. på der anförda grunder. Finge man antaga riktigheten af Arnells påstående (Anm. till St.L. Kpml.B. XXXII), neml. att St.L. först varit lämpad för Stockholms stad, så skulle man lätt kunna förmoda, att, då Jönköpings stad 1349 tillstaddes begagna samma byærkerätt som Stockholm, med denna B.R. menades Stadslagen (hvilken äfven på andra ställen så benämnes, t. ex. i priv. för Ulfsby 1365), och att sål. den senare blifvit utgifven straxt efter Landslagen. Men detta Arnells antagande saknar tydl. giltiga skäl: hvad som förledt honom dertill, är sannolikt lydelsen af 1618 års upplaga, då till grund för densamma utan tvifvel lades de i Stockholm befintliga exemplaren, hvarigenom kommit att deri inflyta flera för Stockholm enskilt afsedda stadganden. Se Kpml.B. XX, XXXII, Rdst.B. XIV, EÖB. XXIII. Såram. m. v. XIV.

sina sysselsättningar fordrar ett närmare, till lokalen mer koncentreradt samlif, så blir formen för dess uppträdande i staten kommunal: följaktligen blir ståndslagen tillika en kommunallag, och såsom sådan måste han af oss företrädesvis betraktas. I denna mening fattad utgör han icke allenast en sammanfattning och ett afslutadt helt af den föregående utvecklingen, han utgör i och genom denna betydelse naturligtvis äfven en grundval för den följande. Han blir således för oss den naturliga utgångspunkten för den öfversigt af Svenska stadsförfattningens historia intill 1619, vi nu begynna. Hela den långa period, som sålunda begränsas, ansluter sig till Stadslagen, och något väsendtligen nytt uppslag förekommer derunder ej, något stort gemensamt steg på utvecklingens bana utöfver St.L. kan ej i författningen spåras[1]: perioden utmärkes i allmänhetaf ett envist stillastående. Detta hindrar dock ej, att de mycket spridda och temligen fåtaliga källorna kunna innehålla flera intressanta enskiltheter rörande denna fråga, åtskilliga lokala fortbildningar och modifikationer, hvilka tillsammantagna blifva af mycken vigt och ofta innebära frön till den senare utvecklingen.

I följd af denna källornas beskaffenhet torde det vara tjenligast att icke lemna en fortgående framställning af ämnet under alla dess sidor, utan fördela detsamma efter vissa allmänna synpunkter, hvilka kunna uppvisas såsom de för ämnet väsendtliga. Kommunen, sådan han bör vara, i sitt normala skick, är ett organ i en högre enhet, genom hvilken allena han får sin rätta ställning, sin förnuftiga verksamhetskrets och sin fulla betydelse. Sådan framträder kommunen, om han betraktas ur Statens synpunkt. Derjemte är dock kommunen äfven en sjelfständig personlighet, med bestämda ändamål och en viss yttre existens, och måste äfven betraktas ur sin egen synpunkt. Dervid fästes uppmärksamheten först vid de organer, som egentligen och i högsta mening skola representera kommunen och realisera hans ändamål d. v. s. vid stadens styrelse. Men som dessa ändamål äro till sin natur privata och sedliga, så blir kommunal-förvaltningen en gemensam angelägenhet, deri alla kommunens berättigade medlemmar böra deltaga, med vissa inskränkningar och gränser, hvilka staten ur *sin* synpunkt måste fastställa. Målet för kommunalstyrelsens utveckling är således, att alla kommunens sjelfständiga medlemmar direkt eller indirekt sättas i tillfälle att utöfva inflytande på hans angelägenheter, dock så, att detta inflytande står i ett riktigt förhållande till den egentliga styrelsemakten och ej förlamar det anseende och eftertryck, hvarmed denna enhetens representant bör uppträda. Kom-

1) Såvida man ej som ett sådant vill räkna Tyskarnes uteslutande.

munalförfattningens svårlösta problem ligger sålunda deri att förstå väl afväga statens och kommunens ömsesidiga rättigheter, så att den förre står öfver den senare såsom en berättigande, skyddande och kontrollerande makt, hvarigenom också kommunen sjelf vinner karakteren af en de enskilta medlemmarne öfverlägsen, högre stående personlighet, hvars existens är oberoende af de enskiltas godtycke. Dernäst blir frågan om att riktigt organisera den egentliga kommunalstyrelsen och menighetens deltagande deri, så att den beslutande och den verkställande makten intaga den rätta ställningen bredvid hvarandra. Den historiska utvecklingen af kommunalförfattningen har nästan allestädes varit sådan, att kommunerna i sin början stått sjelfständiga, utan högre enhet, och sjelfva spelat rolen af stater, samt till sin inre organisation varit styrda genom medlemmarnes omedelbara och oinskränkta deltagande; sedermera har statsmakten och centralisationen småningom, först omedvetet, sedan efter en viss plan gjort sig gällande och i sitt enhetsarbete, liksom alla nyväckta och ungdomliga krafter, till en början gått för långt, så att den kommunala sjelfständigheten ofta gått förlorad i statens enhet, hvarjemte denna makt af en naturlig tendens ordnat kommunalstyrelsen under mer aristokratisk form. Slutligen då jemvigten blifvit återställd och då vid en högre kultur de sociala krafterna ånyo gjort sig gällande och påkallat större uppmärksamhet af statsmakten, har småningom en återgång egt rum till de förra förhållandena, hvilka då ombildats i öfverensstämmelse med den högre ståndpunkten. Dervid har dels centralisationens band i någon mån lossats, dels har kommunalförfattningen sjelf återförts på en mer demokratisk bas [1]).

Vi skola sålunda först betrakta den kungliga myndigheten inom städerna, derpå deras egentliga styrelseorganer och representanter, slutligen kommunens enskilta medlemmar eller menighet.

I. *Den Kungliga myndigheten.*

Ehuru St.L. i flera fall var utbildad efter Tyskt mönster, så kunde detta naturligtvis ej blifva fallet med den öfverherrliga myndigheten, hvilken i de Nordtyska städerna vid denna tid var liten eller ingen. En sådan ställning i förhållande till statsmakten skulle utan tvifvel äfven de Svenska städerna under följande tider kunnat förvärfva sig, om deras inre och yttre resurser varit i någon mån be-

1) Jmfr. om detta ämne Tocqueville de la Democratie en Amerique, Dahlmann Die Politik auf den Grund der gegebenen Zustände s. 238, samt Kommunal-Kommitéens betänk. och förslag 1859.

tydande. Detta var ännu blott händelsen med Stockholm, hvilken stad dock stod i alltför nära och oafbruten beröring med den högsta makten, för att någonsin kunna från denna lösgöra sig. Stockholm intog likväl flera gånger under Unionstiden en sjelfständig hållning vid de inhemska striderna, än för, än emot Unionskonungarne, och den allmänna opinionen synes hafva tillerkänt denna stad en ej ringa politisk betydelse, liksom äfven vigtiga företrädesrättigheter ofta tillades staden eller hans myndiga Råd af de herrskande partierna för att vinna honom [1]). Men å andra sidan finner man ock, att Stockholms ofvannämnda ställning stundom föranledt ingrepp i dess lagliga rättigheter. För öfrigt befunno sig städerna under hela 1400-talet i en temligen undanskymd och derföre väl ock oberoende ställning, med stor frihet att utveckla lokala egenheter. Större enhet och större beroende inträdde med Gustaf I, och sedermera växte oupphörligt det nit och intresse, hvarmed städerna omfattades af Konungamakten, och i jembredd dermed tilltog naturligtvis äfven den senares inflytande.

Den som enligt St.L. utöfvade och bevakade de Kungliga rättigheterna öfver staden, var Konungens Fogat [2]), som på grund deraf intog främsta rummet i den korporation, som utgjorde stadens öfverhet, och deltog i hennes flesta embetsförrättningar. Såsom Konungens ombud var han dock tillika höjd öfver denna korporation och bemyndigad att kontrollera densamma. Denna öfvervakande myndighet utöfvades först och främst vid de årliga valen af stadens styrelse, då han vid plikt skulle infinna sig och i händelse af meningsskiljaktighet under vissa omständigheter hade afgörande rösten [3]). Att Fogaten skulle deltaga i utfärdandet af nya förordningar och påbud, kan man sluta ex analogia, ehuru det icke särskilt omnämnes i St.L. Vidare skulle han deltaga i all doms afkunnande [4]), såsom representanten af den högsta lagskipande makten, medan Rådet ännu ansågs utöfva en kommunen tillhörande jurisdiktion. Han skulle med Rådet utfärda kallelser till Rådstufva [5]) och der sitta för rätta sjelf eller genom "den han fore sik skipar" [6]), under samma ansvar som de öfrige

1) Se vidare härom längre fram.

2) Skrifves på mångfaldiga sätt: Fogat, Fugate, Foghota, Foghet, Foghade, Fougde,

3) Allm. St.L. (1665 års uppl.) Kg.B. I, VII: tå skulu the rådha, som flere samanholda, och bättre skääl hafva och *Fogaten medh holder*.

4) Rådst.B. II, § 6: Enga Doma mäghe Borgamestara el. Rådhmän döma, uthan Fogaten el. hans budh är ther när.

5) Dock ej till s. k. allmän Rådstufva, hvilket skedde genom Borgmästarne: Rådst. B. II, § 4 jmfr. längre fram.

6) Kpml.B. XXVI, XXXIII; Rådst.B. II, § 6.

rättens medlemmar. Vid högmålsbrott egde Fogaten, med Rådmanna råde, att i vissa afseenden efter behag förfara med brottslingen, tills dom var fälld [1]). — Äfven i de flesta administrativa förrättningar, rörande stadens ekonomi och politi, skulle Fogaten enl. St.L. deltaga Dit hörde först och främst sådana, som på något sätt berörde de kungliga rättigheterna [2]). Vidare skulle han deltaga i uppsigten öfver byggnadspoliti, brandordning, handels och handtverksförhållanden, stadsinkomsternas förvaltning [3]) m. m. Af St.L:s hithörande bestämmelser kan man göra den slutsatsen, att Fogatens deltagande i *alla* Rådets administrativa eller judiciella funktioner betraktats som regel, om också enskilta stadganden endast nämna Rådet [4]) dervid verksamt. — Samma gemensamhet och brist på begränsning förefinnes äfven på det exekutiva området, hvarom mer längre fram. För öfrigt var Fogaten till sin person tagen i lagens särskilta beskydd och hade vissa underordnade (svenner) till sitt biträde [5]). En sådan underordnad var väl äfven den Fogat, som å Konungens vägnar skulle föra ordet i Underrätten. Till Fogatens aflöning var anslagen en viss (vanl. större) andel af böter och burskapspenningar samt i vissa fall förbrutet gods som hans ensak [6]).

Sådant var Fogatens ämbete enl. St.L. Liksom de flesta allmänna rättsbestämmelser under Medeltiden undergingo betydliga modifikationer vid tillämpningen och ofta blefvo utan påföljd, i fall de ej hade praxis och sedvänja för sig, så rönte äfven dessa stadganden åtskilliga förändringar och tillägg i följd af lokala förhållandens inverkan. Vi vilja genomgå de vigtigaste bland dessa. — I följd af våra flesta städers obetydlighet, kunde ej en särskilt Fogat tillsättas för hvarje liten stad, utan närmaste landsfogde [7]) eller ock höfvidsmannen på ett närbeläget slott [8]) har ofta äfven fått staden under sin uppsigt. Der-

---

1) Rådst.B. XXXV.

2) Så skulle Fog. med 2 män besigtiga alla till sjöstäder anlöpande skepp, innan de fingo lasta ur, till bevakande af Konungens förköpsrätt: Skml.B. I, jmfr. Kpml.B. XXXIII. Väntetiden förkortades flerstädes från 3 dagar till 1 (ex. Åbo Privil. 1525).

3) KgB. XVIII; Byggn.B. VII—IX, XXII; KpmlB. III, XIX, XXV, XXXI.

4) Som t. ex. GftmlB. XV; RådstB. II, 4.

5) KgB. XII, RådstB. XXXIII.

6) KgB. X—XII, XV, XVI; KpmlB. III m. fl. SkpmlB. I.

7) Så stod Enköping ofta under Åsunda härads, Köping under Åkerbo härads fogde (Enebom Disp. de Enekopia Ups. 1745, Hallman Beskr. öfver Kiöping). — Så äfven Jönköping under Mo och Tweta häraders fogde: Handl. Skand. H. XXXII, s. 394—5.

8) Det är att märka, att ett stort antal af Sveriges städer under forna tider varit försedda med slott i sin närhet.

igenom blef den senare mer lemnad åt sig sjelf, i det Fogdens deltagande vare sig i administrationen eller i rättskipningen blott sällan kunde komma i fråga. Och derpå torde väl städerna i de flesta fall föga hafva förlorat, åtminstone under Medeltiden, medan Regeringens kontroll öfver underordnade var slapp och hennes inflytande af föga höjande beskaffenhet, såsom ofta blott användt för beredande af inkomster. De personer, som i städerna voro hennes representanter, åtnjöto icke heller ett sådant anseende, att de i likhet med senare tiders ståthållare förmådde på ett kraftigare sätt ingripa i stadsstyrelsen. Deremot uppträdde de ofta på ett småaktigt och störande sätt, som bragte staden i harnesk mot dem, i det de gjorde intrång i privilegierna, "ryckte och kippade" till sig sakören och förbrutet gods förr än domen afkunnats o. s. v. [1]).

I några större städer finner man Statsmakten inför kommunen representerad af flera personer: så hafva t ex. både slottsfogde och stadsfogde deltagit i stadsstyrelsen [2]). I Stockholm finner man i detta afseende den största mångfalden både till antal och benämningar. Under 1400-talet hör man omtalas Konungens Höfvidsman öfver Stockholm, Capitaneus arcis et civitatis, Stadsfogde m. fl. Under Gustaf I och hans söner besattes dessa tjenster på olika sätt: slott och stad öfverlemnades 1523 åt en Slotts-Fogat eller Befallningsman, 1529 o. 1531, 1537 o. 38 i Slottslofven åt flera Befallningsmän och Fogdar, Erkedjeknen i Upsala, ett R.Råd, de 4 Borgmästarne samt ett antal Rådmän och borgare, 1542 åt 3 öfverste Slottsråd och Ståthållare [3]), och sedermera vid många tillfällen åt en eller flera Ståthållare [4]). Till och med Borgmästare förekommer i Stockholm och annorstädes beklädda Fogdemakten [5]). De ofvannämnde tjenstemännen hafva ofta flera på en gång deltagit i Rådets förhandlingar och domar, och utom dem

---

1) Se t. ex. Lohman Arboga Känning s. 148, Stockholms Privil. af 1529 och 1563. Ofta heter det i Priv.brefven, att borgarne må åtnjuta vissa förmåner "oqvalde och ohindrade af vår Fogde." — I Åbo utbrast 1498 en "opresning" mellan Fogden och staden, som dock bilades genom en skriftlig förbindelse, ytterligare bekräftad å Rådstufvan inför Sten Sture, som drog Fogden till ansvar för hans beteende. Se Grönblad Nya källor till Finlands Medeltids Hist. I, N:o 56, och sid. 172, n.

2) Se t. ex. Grönblad a. st. N:is 56, 113.

3) Ståthållarne voro vanl. förordnade öfver både slott, stad och län, stundom öfver flera dylika på en gång.

4) Se Palmschöldska saml. Topogr. VII efter RRegistr. Stjernman Höfdingaminne.

5) Se Elers Stockholm III, 171—3; Wieselgren Ny Smålands Beskr. III, s. 3. Palmsch. Top. VII.

åtskilliga andra i Slottslofven [1]). De vanligast förekommande och längre fram permanenta embetena voro Ståthållarens, Befalln.mannens och Slottsfogdens, af hvilka åtminstone den senare vanligen å Rådstufvan tillträdde sitt embete. — Det säger sig sjelft, att den Kungliga myndigheten sålunda representerad i Stockholm skulle uppträda med ojemförligt större anseende och eftertryck [2]).

Från och med Gustaf I börjar en vigtig förändring inträda med den Kungliga Fogaten. Å ena sidan ställdes han öfverallt under strängare kontroll från Statsmaktens sida, steg derföre i anseende, samt utrustades äfven med flera nya rättigheter, jemte det att de forna närmare bestämdes [3]). Men å andra sidan började hans judiciella myndighet, hans deltagande i domar, att alltmer aftaga och komma ur bruk. Detta låg i sakens natur, såsnart kommunens förhållande till staten började klarare inses, och man fann, att den jurisdiktion, som man tillerkänt kommunen i och för sig, blott var en yttring af statsmakten eller Konungens rättskipning, att således Rådet i städerna äfven dömde å dennes vägnar och ej behöfde en särskilt Konungens representant vid sin sida. I somliga städer blef nämnda förhållanden en följd af Fogdens aflägsenhet och hans delade verksamhet. Redan under 1400-talet befinnas ofta dombref utfärdade blott af Rådet eller ock "med Fogatens samtycke och närvaro" [4]), och i Stockhloms Priv. 1529 bemyndigas Rådet att sitta till rätta äfven om Fogaten uteblifver. Då förbud utfärdades för landets fogdar att blanda sig i Domarebefattningar, så började småningom äfven städernas Råd att uppträda med anspråk på samma sjelfständighet. Emellertid dröjde det länge, innan grundsatsen gjort sig allmännt gällande i praxis och slutligen äfven i lag stadfästades. I Gustaf I:s, Erik XIV:s och Johan III:s Instruktioner för Fogdar och Befallningsmän heter det rörande städerna blott, att de skola hafva tillsyn öfver tullens och tiondens utgörande, landsköp o. s. v. [5]), och efter Borgerskapets 1614 gjorda begäran om upphäfvande

1) Ex. hos Palmsch. l. c., Elers a. st.

2) Man finner på 1520-talet Fogden uppträda med stor myndighet i domstolen: så berättas det flera gånger i Protokollen att "mene rådet stod upp och bad Fogden öfverse med den anklagade för den gången." I Fogdestugan infann sig ofta Rådet till ransakningar. Se Olai Petri Tänkebok tryckt af Ekdahl Christiern II:s Arkiv (IV p. 1430, 1435, 1440 m. fl.).

3) Så skulle Befalln.männen hafva tillsyn öfver alla stadens utgifter (Sthms Ordin. 1557, Kbr. 1598, 1602), uppsigt öfver alla främlingar i staden (Sthms Statut. 1570 § 28), i samråd med dem skulle alla stadgar och förordningar utfärdas (Kbr. till Sthms Råd 1573 o. 1578) o. s. v.

4) Se t. ex. Wangstelius Disp. de Thorshälla 1782 p. 8.

5) Saml. af Instruct. för Landtregeringen s. 1—38.

af Befallningsmännens domsrätt blef lydelsen i Gustaf Adolfs äldsta Ståthållare-Instruktioner af 1616 den, att Ståthållaren skulle som oftast vid vigtiga saker *vara tillstädes* på Rådstufvan och hålla hand öfver att de domar, som der afkunnades, måtte hafva sin exekution [1]). Frågan var härigenom icke afgjord, utan lemnad in suspenso, men man ser, att Fogdemakten alltmer tenderade till att blifva en blott kontrollerande och exeqverande myndighet.

I början af 1400-talet finner man benämningen Byfogde framträda i offentliga handlingar [2]), och längre fram förekomma Byfogdar i flertalet af Sveriges städer. Hvilken var då skillnaden mellan denne och den Kongl. Fogaten? I ett Kbr. till Enköping 1413 heter det: "vi hafve unnt dem af E., att de måge välja en af deras borgare till deras Byfougte, med all rättighet som Byfougten bör uppå våra vägna, hvilken oss och ingen annan skall räkenskap göra af det han uppbär uppå våra vägna" [3]). Så medgifves det äfven åt Westerviks borgare 1421, "att de måge sjelfve kesa sig en af deras Byamän till Byfogotha", till Konungens stadfästelse [4]). Samma rättighet tillerkännes Norrköpings stad 1442 [5]); deremot skulle i Raumo stad enl. Kbr. 1444 Biskopen och Befalln.mannen i Åbo tillsätta en Byfogat, "som vår skatt, saköre och ränta deraf uppbära skall och oss der goda redo före göra" [6]). Att nu Byfogden i allmänhet ej kan vara densamme som den Kongl. Fogaten [7]), synes följa dels af hans uteslutande befattning med kronans inkomster, dels deraf att Byfogden vanligen nämnes *efter* Borgmästare och Rådmän [8]). Jemföra vi ytterligare Stockholms Priv. af 1436, der det heter, att om Byfougten, som eljest skulle tillsättas af Befallningsmännen och Rådet, försummar sin skyldighet att sitta i rätten "med rådeno", eger Fogden eller i sista hand Rådet, att sätta en annan i hans stad, så synes det oss sannolikast, att den lägre Fogaten,

---

1) Anf. Saml.: Instr. f. Ståth. i Kexholm, Åbo o. Kalmar ss. 94, 99, 105—6.

2) Redan 1403 förekommer namnet i ett köpebref från Jönköping. H. Sk. II. XXXII, s. 423.

3) Enebom de Enekopia p. 46 n.

4) Siwers Westerviks Hist. o. Beskr. s. 15, 16.

5) Sundelius Norrköpings Minne s. 23 o. 455.

6) Mellenius Hist. Afh. om Raumo, Åbo 1770 s. 9.

7) I några bref föranleder dock lydelsen till en sådan förmodan: se Grönblad a. st. N:o 173, Kbr. till Upsala af 1514 (Stadens Privilegiibok). Priv. f. Åbo 1525.

8) "Vi Borgmäst. Byfogoth och Radh" i Norrköping 1417, d:o i Upsala 1444; "Jag Nils Sture helsar eder alla Borgmäst. Rådm. Byfogot m. m. i Arboga Köpstad" 1484. Jmfr. Graffman de Strengnesia 1768 Bil. L.; Handl. Sk. Hist. XXXII (Kbr. till Jönköping af 1521 o. 1529), Hadorph Bih. till RimKrön. ss. 299, 326.

som skulle förestå underrätten, blifvit kallad [1]) Byfogde [2]). Men då dessa underrätter aldrig blefvo införda i en stor del städer, så öfvergick han der till att blifva uppbördsman först å Konungens, sedan äfven å stadens vägnar och framträder under 1500-talet allestädes som en *stadens* embetsman med olika funktioner på olika ställen, än såsom blott uppbördsman och exekutor, än tillika såsom bisittare dels i underrätten, dels äfven i Rådstugurätten [3]), än skulle han, som det det heter i Wimmerby Priv. 1604, "hafva makt med Rådets tillhjelp att antasta hvem som sig emot lag och rättvisan förbryter och i stadens fängelse i förvaring taga, intill lag och dom deröfver gången är." Äfven i Stockholm finner man i Embetsböckerna [4]) från slutet af 1500- och början af 1600-talet omnämnde 2 "Rettefogdar", som der voro något likartadt med de i Wisby St.L. förekommande 2 Fogdarne, hvilka dels voro domare i underrätten, dels utöfvade den exekutiva myndigheten [5]).

Från Fogdens och Rådets dom vädjades under Konungens egen, hvilken afdömdes dels vid de ordinarie Räfstetingen, dels vid de särskilta, i städerna 2 gånger om året förekommande [6]). Ofta hände ock i dessa tider af enkla former, att den klagande vände sig till Konungen personligen, hvilken i thy fall stundom afgjorde målet genast, stundom anbefallte ny ransakning, stundom åter förordnade ett Rättareting till målets utredande och afdömande [7]). Det var icke heller ovanligt, att klagomål framfördes till Konungen direkte, med förbigående af alla underrätter, och att Rådet blott erhöll befallning om verkställande af sådana domar.

---

1) Namnet Byfogde har sannolikt uppkommit till skillnad från den högre Fogaten, som vanligen tillika var Slotts- eller Häradsfogde. Namnet kan väl äfven hafva kommit från Danmark, ehuru Byfogden der innehade samma befattning, som Konungens Fogat hos oss: jmfr Jacobsen Det Danske Kiöbstadvæsen i 16:de Aarh. (i Molbechs Hist. Tidskr. V, s. 69 ff.).

2) Analogier härför finnas i de Skånska städerna: så blef i Malmö, Cimbrishamn m. fl. Byfogden äfven præses i underrätten: se Colling de jure Sculteti Disp. Lund. 1760 p. 8: Holmström de Cimbrishamnia 1757 p. 32.

3) Se Upsala Tänkeböcker, Sundelius a. st. s. 455; Wimmerby Priv. 1604 § 10 (se Kastman de Wimmerbya Disp. Ups. 1747 p. 9—13).

4) Å Stockholms RådhusArkiv.

5) Wisby St.L. (Sehlyters uppl.) II, 12; III, II, 4.

6) KpmlB. XXX. — Se längre fram.

7) Ex. på ett sådant i Arboga 1460 se Lohman a. st. s. 48, n. Ordförande var Marsken, bisittare Kon:s Kammarmästare, 2 Riddare, 1 Väpnare och 1 Häradshöfding samt "Dandemän och Dandeswena flera."

Under ifrågavarande tiderymd utfärdades högst få *allmänna* förordningar, rörande städernas författning, och de enskilta innehålla sällan något dylikt af mer framstående art. Till de förra höra blott några tillägg till Stadslagen eller ändringar deri, såsom Erik XII:s stadga om skärpt straff för "sidvördning eller sampning" mot Fogaten och Rådet af 1357 [1]) och vidare den vigtiga författningsändringen 1471, då Tyskarne uteslötos ur Rådet. De senare utgöras hufvudsakligen af en hel serie privilegier och frihetsbref för hvar stad, som vanligen innehålla bekräftelse på gamla förmåner eller meddelande af nya, men hvilka sällan röra någon punkt af författningen. De i detta afseende ojemförligt vigtigaste privilegiisamlingar äro Stockholms, hvilken stad af naturliga skäl blef föremål för Konungarnes särskilta och omedelbara uppmärksamhet. Fundationsprivilegier förekomma under äldre tider mera sällan, från slutet af 1500-talet blifva de talrika, isynnerhet genom Carl IX som Hertig och Konung. De innehålla endast ett meddelande af stadsrätt i öfverensstämmelse med "andra våre köpstäder" i riket eller i ett visst landskap. De flesta privilegiibref gå derpå ut att tilldela städerna hvarjehanda jordar, lägenheter [2]), skattefriheter och andra inkomstkällor [3]), och det är under 1400- och 1500-talen som grunden lades till den stora skiljaktighet i skatteväsende och finansförhållanden, som ännu i dag förefinnes mellan Sveriges städer [4]). Ständigt återkommande i nästan alla privilegier äro

1) Olai Petri Krön. s. 132. KgB. XXVI, EÖB. XXVII.

2) Städernas fastigheter betraktades framgent såsom orubbliga och oafhändeliga, i motsats till landtkommunernas jordområden, som ansetts kunna af Konungen efter behag förändras (jmfr Kommunalbetänk. 1859 p. XXXII). Det var dock blott få donationer, som uttryckligen gåfvos till evärdelig ego (t. ex. Kbr. till Upsala 1529, Priv. f. Jönköping 1596 § 9, d:o för Åbo 1600 § 3 m. fl.); i några förekomma inskränkningen: till behaglig tid (ss. i Kbr. till Gefle 1557, till Westervik 1590 m. fl.), i de flesta utsäges derom ingenting bestämdt. För somliga skulle årlig ränta betalas.

3) Stundom mot fullgörande af vissa vilkor, såsom bygg. af stenhus o. s. v. 1564 utfärdades ett "Edikt" om återkallandet af de åt vissa städer beviljade privil., emedan de ej fullgjort vilkoren. RRegistr. För öfrigt voro Priv. sällan ställda på behaglig tid.

4) De vigtigaste förmåner och inbringande rättigheter, som tilldelades städer på olika tider äro följande: hamn- bro- och pålepenningar, 20:de eller 10:de penningen af allt utarf (det förra enl. Priv. f. Upsala 1570 § 5, det senare i Priv. f. Kalmar 1572 § 3, f. Åbo, Wiborg och Borgå 1607, f. Köping 1608, f. Enköping, Trosa och Ulå 1610, f. Wasa 1611), vidare förbrutna fastigheter h. o. h. eller delvis (flera af de sist anf. Priv.), lösören efter bortflyttade främlingar (se d:o), Danaarf h. o. h. eller halfparten (Privv. f. Kalmar $^{12}/_{4}$ 1600, Trosa och Ulå 1610). Genom Handels-Ord. af 1614 (§ 14 o. 15) och 1617 (§ 18 o. 19) fingo alla städer rätt till 10 Dr för hvart öre i' skatt af inrikes och 10:de penningen af utrikes flyttande borgare, samt 3:dje p. af utrikes gående arfvegods till halfparten.

äfven förbuden mot landsköp, olaga hamnar eller marknader, handtverksfrihet o. a. d. De hafva oftast framkallats genom några af stadens utskickade framställda besvär eller böner. Det stående formuläret i dem alla är, att Kon. härmed tager "sine älskelige borgare" eller "trogne undersåter", "sin och Kronones köpstad N. N." o. s. v. i sitt hägn och särskilta beskydd, erkannerligen mot allt intrång af Kon:s embetsmän. De enda privilegier af intresse från 1400-talet äro Stockholms; de af 1436 tilldela Rådet flera nya vigtiga rättigheter i rättsskipning och administration (hvarom mer längre fram), som i följande bref ytterligare tillöktes [1]). Äfven för 1500-talet äro Stockholms Priv. mest framstående. Gustaf I har, utom privil., äfven utfärdat flera ordinantier för enskilta städer, hvilka utvisa samma detaljerade omsorg, att icke säga förmynderskap, som framträder i alla öfriga författningar af honom. I dessa meddelar han närmare föreskrifter äfven för städernas inre politi och ekonomi. Sådana äro Ordinantien för Wiborg från 1540-talet och för Stockholm af 1557, innehållande reglementen för handels- och handtverksförhållanden, uppbörden, byggnadspolitien m. m. [2]). Den märkligaste hithörande författning från Erik XIV:s regering är Privilegierna för Stockholm af 1563 i 37 punkter, innehållande nya bestämmelser om borgerlig rätt och skatt, om burskap, om Rådets missfirmande m. m. Johan III har utfärdat ett större antal stadsprivilegier än någon annan Svensk regent: tillsammantagna utgöra de en otrolig myckenhet [3]). Med skäl yttrar han derföre i bref till Stockholms Råd $^{19}/_{2}$ 1578, att han "allaredan störste parten och synnerligen de förnämste städer med bättre privilegier och större friheter hafver gunsteligen försörjt, än de någon tid tillförne uti de Konungars tid, som här förut regerat, haft hafva" [4]). Resultatet har dock icke svarat emot all nedlagd möda [5]): i stället för att tilltaga, sjönko städerna under Johans regering allt djupare, så att 1589

1) Se brefven af 1444, 1448, 1457, 1463, 1464, 1470, 1494. (Sthms Rådhus-Arkiv).

2) Ordinants för Wiborgs stad, tryckt i Handl. Finl. Häfder af Arwidsson I, ss. 315 ff. (deri omnämnes en Wiborgs *gamle* ordin.). — Ett Mandat och ny Ordinantz oppå Stockholms stads byggning i 16 pktr: Palmsch. Top. XIV och Stiernman Comm. Pol. o. OEcon.stadgar I, s. 149.

3) Endast i Jönköpings RådhusArkiv finnas icke mindre än 40 af Johan utfärdade bref till eller ang. staden. Af dem innehålla 17 privil. o. förmåner.

4) Nordiska Saml. Hist. Urb. Sv.

5) Redan i anf. bref klagar Kon., att hans gode ordningar och meningar blifva mycket vanvördade och af en part ringa aktade.

enligt RRådets uppgift tredjeparten af dem lågo öde [1]). Förklaringsgrunden häraf ligger i den planlöshet och brist på sammanhang, som utmärker Johans flesta regeringsåtgärder, hans mani att reglementera i småsaker, under det han lät det stora hela förfalla. Hans flesta stadsprivil. äro mycket vidlyftiga och detaljerade [2]), hvilket förut endast varit fallet med Stockholms, och innehålla, utom upprepningar af gamla stadgar, skärpta prohibitivåtgärder, förbud mot våldgästning och andra öfliga våldsamheter, närmare bestämmelser om utgörande af borgerlig tunga o. s. v. Dessutom utmärka de sig för en synnerlig frikostighet på donationer och skattefriheter, samt för ett stort nit för städernas yttre hållning, deras förskönande med prydliga hus o.s.v. [3]). Äfven han har utfärdat särskilta Statuter för Stockholms stad 1570 (i 41 pktr), af ungefär enahanda innehåll med Privil. [4]). — Hertig Johan af Östergötland visade i detta som i flera andra fall mycken likhet med fadren: många ord men föga resultat [5]). Handlingen är så mycket mer framstående i Carl IX:s åtgärder: äfven han har både såsom Hertig och som Konung utfärdat ett stort antal, till en del vidlyftiga, privilegiibref för städer, hvari han förnämligast sysselsätter sig med att ordna handtverksförhållandena efter den strängaste prohibitism [6]) och att från städerna utestänga dels främlingar, dels andra samhällsklasser och isynnerhet frälset. Till dessa punkter återkomma vi längre ned. Flera bland Carl IX:s Privilegier innehålla äfven nya bestämmelser rörande städernas författningsförhållanden: de synas gå ut på att bereda större inflytande dels åt den kungliga makten, dels åt menigheten i städerna [7]). Synnerlig uppmärksamhet förtjena de för Göteborg 1607 utfärdade fundationsprivilegier, hvilka vi dock ärna behandla i sammanhang med nästa period, då de i hufvudsaken öfver-

1) Geijer Sv. Folkets Hist. (Örebrouppl.) II, s. 285.

2) Vi anföra som ex. i detta fall hans Priv. för Stockholm af $^{16}/_{2}$ 1570, för Upsala 1570, för Linköping 1571, för Norrköping och Söderköping 1572, för Westerås 1587.

3) Se anf. Stadsprivil.: 12 frihetsår förunnas "dock med sådant besked, att de skole uti hvar gård uppbygga sig till det minsta ett stenhus utmed gaturne, 3 våningar högt", eller åtminstone "Ständelverkshus" murade utåt gatan. Anspråken inskränktes sedermera (se Kbr. till städerna $^{22}/_{6}$ 1584 RRegistr.) till "sköne trähus tegeltäckte och målade med kopparrök."

4) Nordinska Saml. Hist. U. Sv. De föreskrifva äfven några nya (lägre) Embetsmän för staden (§§ 23, 24), nya best. ang. Gästers rättigheter och uppsigten öfver dem (§§ 15, 28).

5) Se t. ex. Priv. för Norrköping af 1609 och 1613, jemförda med Hallenberg.

6) Med slutna skrån och bestämdt antal handtverkare för hvar stad, se t. ex. Priv. för Wimmerby af 1604, för Trosa och Ulå af 1610, Stiernman ss. 261, 287, 346, 519.

7) Se Wimmerby Priv. 1604 § 10, Projektprivil. för Fahlun och Sala 1609, jfr s. 152.

ensstämma med Gustaf Adolfs Priv. af 1621. Carl IX har i denna gren af styrelsen, som i många andra, varit en föregångare till Gustaf Adolf.

Det var icke blott genom privilegier och frihetsbref som Konungarne stodo i kommunikation med städerna och deras styrelse: man finner, isynnerhet från 1500-talet en stor mängd till städerna utfärdade Konungabref rörande alla möjliga ärenden: än tillhöra de det politiska området, innehållande uppmaningar till trohet, tacksägelser för visadt nit, tillkännagifvanden af fattade beslut eller andra märkeliga händelser[1]), kallelser till allmänna möten o. s. v., än äro de af ekonomisk natur såsom qvittenser, anvisningar, utskrifningar af gärder eller anmodanden om hjelp, än angå de rättvisans skipande eller exeqverande, och befalla måls upptagande, tvisters afgörande eller skulders utkräfvande m. m. Konungarnes personliga beröring med städernas myndigheter var naturligtvis sällsynt, om man undantager Stockholm, der man under äldre tider ofta finner dem uppträda i förhandlingar med Rådet eller menigheten. Så höll Gustaf I 1525 "men" med borgerskapet å S:t Gertruds gillestufva[2]), dit äfven Carl Knutsson och Sturarne flere gånger sammankallat menigheten[3]); på Rådhuset infann han sig 1524 till onda ryktens och stämplingars förekommande, vidare 1527, då Rådet i hans närvaro upprättade förslag på 3 personer, af hvilka han utnämnde en till Borgmästare[4]), och 1529, då han sporde Rådet om dess mening angående de upproriska Herrarne och erhöll dess trohetsförsäkring[5]) o. s. v. På samma sätt har äfven Carl IX flera gånger trädt i omedelbar beröring med stadsstyrelserna, dels i Hertigdömets städer, dels i Stockholm. Stundom läto Konungarne för Stockholms Råd tillkännagifva sin vilja genom utskickade RiksRåd, hvilka ofta befinnas hafva deltagit såväl i administration som i domstolsförhandlingar[6]).

De Svenska städerna voro som vi sett från början omedelbart Kungliga, i och med detsamma de trädt ur landsrättens område: deras rättigheter voro ej såsom i Tyskland och annorstädes grundade på en and-

1) Se t. ex. bref i Upsala Priv.bok, i Jönköpings Rådhusarkiv, m. fl.

2) Ekdahl a. st. s. 1435.

3) Se t. ex. Hadorph Bih. t. RimKrön. s. 211 m. fl.

4) Elers Stockholm I, s. 89 efter Olai Petri T. B. — Ett dylikt ingrepp i Rådets fria val har äfven under denna period flera gånger förekommit: härom mera längre fram.

5) Ekdahl a. st. s. 1448—9.

6) D:o ss. 1434, 1449. — Ex. i mängd anf. af Palmsch. Top. VII.

lig eller verldslig immunitet. Genom förläningars utdelande och förpantningar till enskilta personer undandrogos flera städer i vissa fall konungens omedelbara uppsigt och beskydd. Redan 1279 finner man, att konungen åt biskop Henrik i Linköping medgifvit full konungslig rätt öfver en stad, som den senare tänkte anlägga i Småland [1]). Från medlet af 1300-talet blefvo dylika förläningar allt vanligare, såväl till prester och kloster, som till verldsliga herrar. Som ex. på det förra anföra vi Wadstena priv. af 1400, enligt hvilka eganderätten till grunden jemte tomtören och dagsverken tillerkändes Klostret [2]), samt förläningen af Upsala stad till Erkebiskop Jöns Bengtsson på 1460-talet. I Wadstena skulle enligt ett K. Christoffers bref Borgmästare och Rådmän tillsättas "med abbadysenes raadh oc fulbordh", äfvensom inför henne aflägga räkenskap för uppbörden [3]). De främmande furstar [4]) eller inhemska store, som från medlet af 1300-talet innehaft Svenska städer som förläning eller pant, hafva utan tvifvel icke blott upptagit Konungens skatt, utan äfven utöfvat alla Konungsliga rättigheter öfver städerna, utfärdat privilegier och tillsatt Fogdar [5]). Under Albrekts regering behandlas de i pantebrefven såsom de alls icke anginge Sveriges Konung. De städer, som längre fram kommo under Hertigdömena, hafva der åtnjutit samma rättigheter och skydd som förut, och vanligen till och med vunnit på bytet. Inskränktare var den makt, som i Grefskapen [6]) utöfvades öfver der befintliga städer. I de äldsta förläningsbrefven af 1561 och 1562, hvarigenom Bogesund och Westervik kommo under Grefvarne Ros och Sture, nämnes ej något närmare angående rättsförhållandet [7]), men i ett bref af 1570 för Sturefamiljen

1) Volumus quod dicta villa — — tam in regalibus causis et juribus, quam Episcopalibus, dicto Episcopo et suis successoribus *pertineat pleno jure.* D. S. 686.

2) Lagerbring Svea Rikes Hist. IV, s. 264.

3) Wadstena Klosters Copie-bok å Kongl. Bibl. i Stockholm.

4) Så innehades Kalmar under lång tid först af Holsteinska Grefvarne (1361—4), derpå af Hertig Albrekt från Meklenburg: på samma sätt Nyköping, Thorshälla, Westervik m. fl., se Styffe Bidr. till Skand. Hist. p. L o. XCVII samt n:is 36, 41, 42, 50, 63.

5) Se t. ex. två bref till Arboga af 1480 o. 84 begynnande: "Jag Nils Sture, Höfvidsman på Westerås och öfver Dala", deri denne tilldelar privil. och kallar Fogden "*sin* Fogeta." Lohman a. st. s. 31, 32. Jemför äfven Grönblad a. st. n:o 56 o. pantebrefvet på Söderköpings stad 1419 hos Lagerbring IV, Bil. 1.

6) Äfven till andra bortförläntes städer under 1500-talet: så Jönköping 1522, Linköping, Skenninge o. Wadstena 1533, Söderköping 1537 m. fl.

7) Det Ros'ska Grefvebrefvet tryckt i Nya Sv. Biblioth. II, I, s. 21, det Stureska af Siwers a. st. s. 349—53.

tillägges Grefven rättighet att anlägga nya städer på sitt område, äfvensom att döma i andra instansen [1]). Privilegier utdelades fortfarande direkte af Konungen, men deremot förestods staden af Grefvens Fogde [2]). — Slutligen har det äfven inträffat, att en stad erhållit en annan i förläning, såsom då Gestrikland och Upsala stad 1470 öfverlemnades åt Stockholm som säkerhet för en fordran.

II. *Stadskommunens organisation.*

Vi hafva redan nämnt, att den af Magnus Eriksson utfärdade allmänna Stadslagen utgör grundvalen för städernas författning under hela tiderymden, och det är först med Carl IX, som nya grundsatser börja uttalas, grundsatser, som dock icke erhöllo någon bestämd form eller blefvo djupt ingripande förr än genom Gustaf Adolfs och Axel Oxenstjernas organisationer. Icke heller undergick St.L. någon allmän ombildning, någon betydligare förändring efter nya tidsförhållanden, om man undantager 1471 års stadga. Deremot har St.L. under tidernas lopp blifvit temligen modifierad i enskilta punkter: St.L. har i flera afseenden varit beräknad för ett annorlunda beskaffadt stadslif än det Svenska då förtiden var, och då främmande, obekanta inrättningar efterbildades, låg det i sakens natur, att lagens bud fingo tills vidare hvila, der de icke väl stämde öfverens med de faktiska förutsättningarne: detta har säkert förhållandet varit med flertalet af Sveriges städer. Dertill kommer, att lagens stadgar i flera fall voro temligen obestämda och lemnade fritt rum för lokala sedvänjors och andra dylika mindre skiljaktigheters utbildning. Detta fortgick obehindradt och utan särdeles kontroll från konungamaktens sida under 250 år, och vi kunna sålunda väl förstå, att splittringen skulle vara ganska stor, då slutligen 1618 en revision företogs, och de särskilta lagböckerna skulle sammanjemkas, äfvensom vi kunna fatta Gustaf Adolfs klagan, att lagen "blifvit förd utur sin rätte mening", hvilket han tillskrifver "oförståndige afskrifvare och andre vrångvise menniskor" [3]). I brist på en kritisk och jemförande upplaga af St.L. kan man ej med visshet uppgifva, huru vidt de särskilta städernas exemplar af densamma afvika från den ursprungliga: man kan dock sluta af de säkert icke fullständiga "Åtskillnaderna" i 1665 års Foliouppplaga [4]) (till hvilka vi återkomma i det följande), att det icke varit obetydligt. Att

1) Siwers a. st. s. 353—9.

2) Siwers a. st. s. 84, 86 m. fl., Winbom Diss. de Ulricæhamn Ups. 1782 p. 9.

3) Gustaf Adolfs bekräftelse af St.L. 1618.

4) Swerikes Rijkes Stadzlagh. Stockholm hos Ign. Meurer 1665.

döma af lydelsen i flera stadsprivilegier från 1400-talet skulle man förmoda, att flera städer egde sina särskilta stadsrätter. Så talas redan 1384 i ett K. bref om Norrköpings bok och stadsrätt [1]), 1403 förunnas stadsrätt åt Wiborg, "äpter thy som stadzboghen j Upsalom utwyser" [2]), och 1444 åt Raumo med åtnjutande af den lag och rätt, som de hafva i Åbo [3]), 1484 nämnes "Arboga köpstadslag" [4]) o. s. v. [5]). Alla dessa s. k. stadsrätter äro naturligtvis blott olika upplagor af allm. St.L. [6]). Benägenheten att splittra den senare i flera lokala lagar förskrifver sig kanske till en del från beröringen med Danmark, der alla betydligare städer egde sin särskilta rätt [7]), samt från det Tyska föreställningssättet, för hvilket en allmän stadslag var något alldeles främmande. Bjärköarätten var för Sverige ett uppslag till ett liknande rättssystem för våra städer, och utan tvifvel är det deras obetydlighet, som föranledt tanken på en för dem alla gemensam lag. Deras föga skiljaktiga uppkomstsätt och enahanda intressen underlättade företaget.

1) *Stadens styrelse.*

Vi hafva i det föregående undersökt de första spåren till en egen kommunalstyrelse för städerna och funnit dessa häntyda dels på ett inhemskt, dels på ett Tyskt (Lübskt) ursprung. Rättegångsväsendet i städerna hade af naturliga skäl till en början antagit Svenska former och utbildat sig i analogi med landets, på samma sätt som de förras lagar bildat sig efter det senares. Behofvet af en särskilt administration infann sig dock snart, och mönstret för hennes inrättning hämtades då naturligtvis från de i detta afseende fullt utvecklade Nordtyska städerna, isynnerhet som beskaffenheten af den Svenska domstolsnämnden icke gerna medgaf någon utbildning i administrativ riktning. I Bjärköarätten efterbildades visserligen den Lübska rätten,

1) Br. tryckt af Hertzman och Ringborg a. st. I, 29.

2) Arwidsson Handl. Finl. Historia I, s. 9.

3) Mellenius a. st. s. 9. — 1446 erhåller Lidköping sådan stadsrätt, "som andra våra köpstäder hafva i Vestergötland", se Gilberg de Lidekopia Disp. Ups. 1744—46.

4) Lohman a. st. s. 32, b.

5) Stjernhöök i De Jure Sv. Goth.que vet. p. 20 och 113 tillägger Söderköping en egen lagbok, som han sjelf sett. Af Södersten disp. de Sudercopia 1736 underrättas man, att denna lagbok inledes med följande ord: "Her byrjas Sutherkopungs Lagboch", samt bär årtalet 1380. Detta är blott ett ex. af St.L. jmfr Schlyters företal till Bj.R. p. XXXVIII. — Hit hör berättelsen om Sigtuna urgamla lagbok, som enligt Prof. Lundii uppgift vid en transport förkommit i Mälaren, se Hadorph föret. t. Björk.R.

6) Dermed menas äfven någongång städernas privilegier.

7) Se Kolderup Rosenvinge Saml. af gamle Danske Love V, s. 49—485.

men deri förekomma dock flera spår af de Svenska domstolsformerna. Efter denna tid blef det Tyska inflytandet så öfverflyglande och Stockholms exempel så afgörande, att hela stadsväsendet småningom ordnade sig derefter. På somliga ställen har dock förmodligen det gamla rättegångssättet fortgått en tid i jembredd med den nya administrativa myndigheten eller Rådet. En sådan administrativ och ordnande makt har på de flesta ställen varit utgångspunkten för Rådets bildning, så i Tyskland [1]), så äfven i Danmark [2]). Härmed förenade sig helt naturligt en viss lägre politi-lagskipning, i det Rådet måste vaka öfver stadens ordningar, mått, mål, vigt o. s. v. samt bestraffa förbrytelser deremot. Dess jurisdiktion sträcktes allt längre, och under det alltjemt tilltagande Tyska inflytandet absorberades småningom det Svenska elementet, så att, då allmänna St.L. utfärdades, det Tyska deri behöll fullständig seger, och Rådet framträdde med helt och hållet Tysk organisation, för hvars närmare detaljer vi nedanföre skola redogöra.

Detta är ett för Sverige ganska märkvärdigt resultat, om man jemför förhållandet i grannländerna Danmark och Norge. Enligt Köpenhamns stadsrätt af 1294 hade visserligen Rådet en temligen vidsträckt jurisdiktion [3]), men detta var dock ett alldeles isoleradt exempel, ty ännu i Malmö och Lunds stadsrätter af 1360 och 1361 låg den dömande makten helt och hållet i borgarnes händer, och Rådets auktoritet var blott administrerande [4]). Och äfven sedan Rådet tillegnat sig den dömande makten, fortfor det gamla rättegångssättet vid sidan af Rådets jurisdiktion isynnerhet i vissa kriminalsaker [5]). Hvad Norge beträffar, så omtalas i den nyare Bjarkörätten 12 Rådmän i stadsdomstolen, men jemte dem en nämnd af 12 byamän [6]): således en något blandad organisation, der det Tyska elementet visserligen är vida starkare än i Danmark, men ännu icke så rent framträdande som i vår Stadslag. — Vi gå nu att redogöra för Stadsstyrelsens närmare beskaffenhet, sådan han framträder i Stadslagen och sådan han sedermera på denna grundval utvecklade sig. Vi hafva då först att tala om stadskommunens offentliga representant, den egentlige vårdaren och förvaltaren af stadens rätt

---

1) Frensdorff a. st. s. 28.

2) Kolderup Rosenvinge Dansk Retshistorie I, s. 103, 104.

3) Kolderup Rosenvinge Saml. af gamle Danske Love V, p. 9, 112, 115.

4) A. st. p. 68, 77, 79.

5) Kolderup Rosenvinge Dansk Retshistorie I, s. 105.

6) Munch a. st. IV, s. 571—2.

Rådet
eller Magistraten, som det från Gustaf Adolfs regering började kallas, innefattande både Borgmästare och Rådmän såsom en enda korporation, der de förra blott voro tillfälliga ordförande. I denna mening förekomma Råd och Rådmän ofta i St.L. [1]), och äfven långt efteråt i protokoller och handlingar [2]). Det är först i slutet af tiderymden, då Borgmästare-platserna flerstädes började blifva permanenta embeten, som en större skillnad i detta afseende gjorde sig gällande. — Vi skola först betrakta Rådets organisation, sedan dess funktioner och verksamhetskrets.

a) *Rådets Organisation.*

Hvad först beträffar vilkoren för *valbarhet* till Rådsmedlem, så erfordrades härtill enligt St.L:s ursprungliga lydelse att besitta "eget arf i stadenom" [3]), hvilket uttryck sedermera ändrades till det liktydiga "liggande grund [4])." I Wisby St.L. saknas denna föreskrift [5]), deremot äro både denne och den Lübska rätten försedde med en mängd detaljerade bestämmelser för valbarheten [6]), hvilka ej förekomma i allm. St.L. och der äfven voro onödiga, dels i anseende till de i analoga fall gällande Svenska rättsbegreppen, dels i följd af den mindre rörelsen och tilloppet af främlingar i våra städer.

Vidare föreskrifves, att af samma slägt blott fyra få sitta på en gång i Rådet, och att icke två bröder der få inväljas, "utan att ej är annat val till" [7]). Både den Lübska och Wisbyensiska rätten äro i detta fall vida strängare [8]), och att skärpta stadganden äfven hos oss varit behöfliga, finner man af de återkommande klagomålen öfver nepotism och afseende på slägtskapsförhållanden vid tillsättande af stadens embeten. — Den i de Tyska stadsrätterna starkt accentuerade föreskriften, att alla herretjenare (hofmän) äro uteslutne från Rådet [9]), saknas helt och hållet i St.L., hvilket är naturligt då man

1) Se t. ex. KgB. I § 2, VIII; Byggn.B. VIII; Kpm.B. XIX, XXXI; Rådst.B. XXXII; Hgml.B. I m. fl.

2) Se t. ex. Olai Petri Tänkebok (Ekdahl s. 1430, 1440, 1449 m. fl.)

3) St.L. (1665 års uppl.) fol. 60.

4) St.L. KgB. II.

5) I dess ställe erfordrades att hafva varit borgare i staden år och dag: enl. Sv. St.L. var man borgare, så snart man blef besutten derstädes och dit inflyttat.

6) Se Wisby St.L. I, 1; Frensdorff a. st. s. 39.

7) KgB. IV. I några äldre exemplar tillägges äfven den inskränkningen: "så att de sitta ett år", i likhet med Hamburgerrätten af 1292.

8) Se Hach das alte Lübsche Recht II, 52; W. St.L. I, 1, §. 3.

9) Frensdorff ss. 39, 100.

besinnar den ställning, som öfverheten från början intagit till våra städer, och dermed jemför förhållandet i Tyskland. Man finner sålunda hos oss, att slottsfogdar, häradshöfdingar o. a. d. på samma gång varit Rådmän [1]), liksom ej heller frälse utgjort absolut hinder för inträde i Rådet [2]). Då enligt Lübska rätten handtverkarne voro uteslutne från Rådet [3]), kunde detta naturligtvis ej komma i fråga i de Svenska städerna med deras ringa tillgångar och flerstädes inskränkta köpenskap: man finner derföre på Rådslängderna från 1400- och 1500-talen ett stort antal handtverkare, såsom Skräddare, Skomakare, Smeder, Skinnare, Bältare, Guldsmeder, Bårdskärare m. fl. [4]). Säkerligen hafva dock köpmännen dervid haft företräde.

Slutligen skulle enligt Magnus Erikssons stadslag hälften af Rådet utgöras af Tyskar, i likhet med hvad som stadgats i Wisby St.L. [5]) och sannolikt faktiskt egde rum i flera af Sveriges sjöstäder. Det oaktadt är det märkvärdigt och ett slående bevis på Hansestädernas öfvermakt, att en sådan organisation kunnat i lag fastställas. Såvida stadgandet ej tillkommit i följd af någon tillfällig förlägenhet å Magnus' sida, för att vinna Lybeckarne, med hvilka han vid denna tid efter långvariga stridigheter afslöt stillestånd [6]), skulle man kunna tänka sig dess tillkomst sålunda, att det åsyftat att åt Svenskar förbehålla *åtminstone halfva Rådet* i de sjöstäder, der Tyskarne redan räknade *pluralitet* och hotade med fullkomligt utträngande af det Svenska elementet, hvaremot i en stor del landtstäder Svenskarnes öfvervigt var betryggad genom stadgandet i KgB. II: "Kan ock tima, att minna mantal är af Tydiskum än Svenskum eller färre qvemlike, thå fylles talet med Svenskum mannum." Detta har säkert ofta blifvit fallet i de mindre och från hafvet aflägsna städerna, såsom man ser af rådslängder [7]). Deremot finner man t. ex. i Kalmar år 1389 bland det talrika Rådet högst få Svenska namn [1]), och i Stockholm

1) Så var i Åbo 1504 en Rådman tillika både Slottsfogde och Häradshöfding se Porthan Chronicon Episc. p. 727; i Enköping var 1545 Borgm. tillika Häradsdomhafvande: Enebom l. c. p. 79. — Borgm., Rådmän och borgare i Sthm finner man ofta i Slottslofven derstädes eller såsom underfogdar.

2) Exempel derpå hos Grönblad a. st. s. 173 n.

3) Frensdorff s. 40: de van openbare hantwerkehebben gewonnen er goet.

4) Se Rådslängderna för Norrköping, Örebro, Arboga, Strengnäs hos Sundelius, Norrk. minne s. 458, 472; Bagge Beskr. om Örebro s. 250, 255; Lohman a. st. s. 144 och följ.; Graffman de Strengnesia p. 38. — I Mariestad har 1623 en Trädgårdsmästare varit Borgm. (Tidström de Mariestadio Sthm 1748).

5) Der står dock blott helt obestämdt, att Rådet skulle väljas "van beiden tunghen."

6) Se Styffe a. st. p. XIX.

7) Se t. ex. anf. rådslängder från Arboga och Strengnäs.

1420 bland 21 Rådspersoner blott två à tre Svenskar [2]). Emellertid blef Tyskarnes inblandning i styrelsen af högst olyckliga följder för en del städer och förnämligast Stockholm: man ihågkomme uppträdena under Konung Albrekts fångenskap [3]) o. s. v. I Stockholm gick det slutligen så långt, att till och med tjensterna vid Tullen och myntverket voro besatta med Tyskar, och, såsom det klagades, för Svenske män intet återstod, om de icke ville blifva skarprättare eller dödgräfvare. Det var väl också egentligen från Stockholm som reformen utgick.

Den fosterländska harmen öfver Tyskarnes obilliga rättigheter och öfvermod gaf sig luft strax efter Brunkebergs slag 1471; då kom menigheten i Stockholm och af flera andra städer samt allmoge af alla landskap inför Riksföreståndaren och Rådet och förklarade, att i anseende till det förderf, som af nämnda lagbud blifvit en följd, och eftersom det vore exempellöst, att en stad måste hafva "tu tungomål uti sittande Råd", fordrade de stadgans upphäfvande med hot, att eljest sjelfve göra slut derpå [4]). Ehuru i följd häraf Tyskarne alldeles skulle vara utestängde från Rådet och "andra märkeliga embeten" i staden, har man dock skäl att betvifla den bokstafliga tillämpningen deraf: en så genomgripande förändring kunde väl i flera städer svårligen genomföras omedelbarligen, och i anseende till det vänskapliga förhållandet till Lybeck under följande årtionden måste säkerligen varsamhet iakttagas. Emedlertid bekräftades förordningen i senare öfverenskommelser, så i Christian I:s försäkring af 1476 § 18 samt Kalmare Recess 1483 § 22 [5]). Christian II tillsatte 2 Tyska borgmästare i Stockholm, och ännu 1568 föreslog Johan III i förhandlingar med Stockholms stad, att någre bland Rådsmedlemmar skulle vara Tyskar [6]). Att äfven sedermera Tyska Rådsmedlemmar ej varit sällsynta, kan man sluta deraf, att Gustaf Adolf både i sin Konungaförsäkran och sin första resolution på Städernas besvär [7]) måste utlofva, att ej ut-

1) Se Löfgren Kalmar och dess Stift I, s. 54. De förekomma i ett på Tyska författadt hyllningsbref till Margareta. — Kalmar synes vid denna tid genom den särdeles lifliga beröringen med Hansan samt sitt Tyska öfverherrskap [se sid. 141] hafva varit så godt som en Tysk stad.

2) Se utdrag ur Tänkeboken hos Palmschöld Top. VI.

3) Dermed nekas ej, att Tyskarne genom sin högre bildning flerstädes befordrat ordning och skick.

4) St.L. (1665 års uppl.) fol. 59 och 60.

5) Hadorph Bih. till RimKrön. ss. 299 och 326. — I Kalmare Recess nämnas både Borgmästare, Rådmän, Tullnärer, Byfogdar, Kämnärer och Stadsskrifvare.

6) R.Registr.

7) Stiernman Riksd. och Mötens Besl. I., s. 651 och 667.

ländingar skulle förordnas till Magistratspersoner i städerna. I ett vidlyftigt memorial rörande städernas uppkomst i riket, utan namn eller datum, hvilket synes vara författadt omkring 1620, angifves såsom en felaktighet i städernas styrelse, att "de somligstädes sätta sig öfver hufvudet Tyske Borgmästare och Rådmän, tvärt emot lagens ord" [1]); och ännu 1672 förekom i städernas besvär en anhållan, att inga utländingar måtte tagas till Borgmästare eller Rådmän [2]).

Vi komma nu till *valsättet* och *sammansättningen*. Båda voro helt och hållet efterbildningar af Tyska stadsrätter; men under det i Lybeck det förra och i andra Hansestäder, såsom Stralsund, Hamburg m. fl., äfven den senare voro noga bestämda, äro deremot de hithörande stadgandena i St.L. ganska sväfvande och blefvo derföre ock under utvecklingens gång föremål för olika uppfattningar och tilllämpningar, så att dessa förhållanden icke allenast voro olika i olika städer, utan äfven i samma stad gestaltat sig annorlunda på olika tider. Det är derföre svårt, att deruti fixera och uppställa någon genomgående norm: vi skola dock försöka ange grunddragen.

Den allmänna tendensen hos Rådsorganisationen var, i enlighet med det då för tiden i Hansestäderna gällande förhållandet, aristokratisk, ty valrätten låg hos Rådet sjelft och utöfvades medelst ett slags Cooptation, ehuru ej så tydligt uttalad som i Lübeck [3]), der Rådstjensterna voro permanenta, såvidt ej innehafvarne gjorde sig ovärdiga desamma, och det så, att hvarje år blott två tredjedelar af Rådet voro i tjenst eller utgjorde det "sittande Rådet", medan den tredje delen under namn af det gamla Rådet åtnjöt tjenstledighet och sedermera efter anställd pröfning af ett särskilt elektors-utskott åter inträdde i sin embetsutöfning. Enligt St.L. i hans ursprungliga lydelse var äfven i Svenska städerna Rådet fördeladt på tre linier. Af det föreskrifna antalet 6 Borgmästare och 30 Rådmän skulle "tio Rådmän vara ett år, tio andra året, och tredje året sammaledes, och två Borgmästare skola vara hvart år med dem tio" [4]). Här var sålunda blott *en* tredjedel hvarje år "sittande." Såväl denna modifikation, som Rådets antal synas vara hemtade från Wisby Stadslag, hvilken sannolikt icke långt förut blifvit af samma Konung [5]) stadfästad och innehåller all-

---

1) Oxenstjernska Saml. å Riks-Arkivet.

2) Res. på Städ. besvär 1672 § 17: Stjernman s. 1700.

3) Frensdorff s. 101—106.

4) 1665 års Upl. fol. 60.

5) W. St.L. Schlyters företal p. V, VI.

deles enahanda stadganden [1]). Af ofvannämnda uttryck synes följa, att successionen borde vara bestämd åtminstone för de treåriga kretsloppen: det oaktadt skulle val årligen företagas, och det på följande sätt. Åtta dagar före S. Walborgs dag skulle Rådet in pleno (såväl det gamla som det nya) sammankomma å Rådstufvan och der inför Fogaten välja Borgmästare och Rådmän, hvilka sedan skulle "efter gamblum stadga" [2]) på Walborgsdagen [3]) "lysas" [4]). Detta dunkla och ofullständiga stadgande behöfver onekligen förklaringar [5]). De som vid nämnde tillfälle skulle väljas voro naturligtvis blott medlemmarne af det sittande Rådet för kommande embetsår [6]), ty de afträdande voro sjelfskrifna ledamöter af det gamla. Proceduren kallas oegentligt nog ett val [7]): det var väl i sjelfva verket ej fråga om annat, än att pröfva, huruvida anmärkningar förefunnos mot de Rådmän, som nu voro i turen att sitta eller om några af dem ville afsäga sig sin befattning (ett fall som ofta har inträffat i våra städer, der både hedern och fördelen voro ringa). I annan händelse inträdde dessa i sin äfven af lagen antydda rätt.

Det aristokratiska i denna institution mildrades något genom valsättets formaliteter, i det Rådet ej framträdde som en permanent och en gång för alla sluten korporation, som blott kunde förändras genom frivilligt afträde, utan årligen vexlade genom ett om ock blott formellt val, hvartill kom, att denna akt erhöll en offentlig och kommunal karakter genom det högtidliga kungörandet inför menigheten [8]). Rådets stora antal under äldre tider gaf äfven åt detsamma en mer demokratisk hållning.

Vi nämnde, att lagens ofvannämnde bestämmelser vid tillämpnin-

---

1) W. St.L. I, 1, § 2.

2) Vi fästa uppmärksamheten vid dessa ord såsom häntydande på äldre sedvänjor i detta fall. Samma uttryck förekommer på andra ställen, såsom KgB. XV angående burskaps-penningarnes användande.

3) I Lübeck hölls det årliga placitum strax efter Påsk: se Hach d. Alte Lüb. Recht s. 144.

4) St.L. KgB. I.

5) Wisby St.L. är i detta afs. ännu ofullständigare. Orsaken härtill är väl den, att man ville lemna något rum för tradition och praxis.

6) Jmfr. RådstB. II: "the Borgmäst. och Rådhmän, thet året skulu sitta och rätta, epter thy the stadgade voro om *Walburgamässona*."

7) I Lübska rätten samt Wisby St.L. talas ej om välja, utan nämna (nomen, nömen) se Hach a. st. II, 53; W. St.L. I, 1.

8) Proceduren beskrifves af Tänkeböckerna med följande uttryck: "då sattes stadens deputerade embeten, reciterades Embetsrullan för kommande år" o. s. v.

gen undergingo mångfaldiga modifikationer. Dervid kunna vi först anmärka, att Rådsvalet i åtskilliga i synnerhet mindre städer, der menighetens inflytande lättast gjorde sig gällande, från början fick en starkt demokratisk prägel, i det Rådets tillsättande helt och hållet bestämdes af menigheten på de i sådana städer ofta förekommande allmänna Rådstugorna, förmodligen i öfverensstämmelse med förut gällande bruk och sedvänjor [1]). Samma omvexling, som enligt lagens första lydelse skulle ega rum i tre afdelningar, inskränktes sedermera efter antalets förminskande till två [2]), men det är icke på många ställen, som man finner turvexlingen ordentligt iakttagen. Vi vilja anteckna några exempel, hvilka, ehuru inskränkande sig till Borgmästarne, dock flerstädes äfven torde gälla om Rådmännen. Så finner man, att regelbunden alternering mellan de förra i Stockholm var det normala under 1400- och 1500-talen samt ända till periodens slut [3]), i Jönköping alternerade både Borgmästare och Råd under äldre tider [4]) i Arboga var detta åtminstone med Borgmästarne det vanliga (t. ex. åren 1462—1489, 1495—1515, 1545—1556, 1573—1589) [5]) och i Kalmar 1429—1450 [6]), i Lidköping egde detsamma vanligen rum ända till 1621 [7]) och att döma af senare tiders praxis äfven på flera andra ställen. Dock observeras, att turen dervid ej alltid så strängt iakttogs, hvarföre ofta endera Borgmästaren satt qvar några år i följd, en annan först efter 3 à 4 år åter tillträdde o. s. v. I flera Kon. bref föreskrifves eller antydes alterneringen såsom det rätta. Så skulle enligt Christoffers anf. bref till Wadstena [8]) af de 4 Borgmästarne och 8 Rådmännen 2 B. och 4 R. sitta hvart år. I Hedemora, Köping och Strengnäs skulle enl. Kbr. af 1459 de två Borgmästarne "sitta rätten hvar sitt år", hvaremot de sex Rådmännen synas varit permanenta. I Carl IX:s Tullordning 1600 förutsättes en dylik turvexling mellan Borgmästarne såsom öfverallt iakttagen [9]).

---

1) Det heter ofta i Protokollerna: "enhälligt vald af Råd och Menighet", "föreslagen af Rådet och af menige man samtyckt" o. s. v. I Arboga tänkebok heter det år 1614 $^{24}/_{4}$: "desse efterskrifne blefvo valde till Embete af K. M:s Befallningsman samt Borgmästare och Råd och gemene man" — Svea Hofrätts Arkiv.

2) St.L. KgB. II.

3) Se Stockholms stads Tänkeböcker, Skottböcker och Embetsbok å RådhusArk.

4) Jönköpings Tänkeböcker (Jmfr. Sundelius a. st. s. 445, H. Sk. Hist. XXXII).

5) Lohman a. st. s. 144.

6) Kalmars Tänkebok å Upsala Akad. Bibliothek.

7) Gilberg de Lidekopia.

8) Se sid. 141 o. 153, [2]).

9) Stiernman Comm. Pol. och OEcon. stadg. I, 458.

Ofta finner man en sådan praxis hafva utbildat sig, att samma Råd förblef sittande under en längre tid, under det Borgmästare-embetet gick i tur mellan Rådmännen, hvarföre man någongång finner samma person 4 à 5 gånger som Borgmästare och derefter hvarje gång åter som Rådman[1]). Tvärtom inträffade ock, att Rådet alternerade, under det Borgmästarne oafbrutet tjenstgjorde[2]). Äfven befinnas ofta samma personer hafva qvarstått som Borgmästare och Rådmän under en längre tid[3]) och ända till sin död eller afsägelse, i hvilket fall den anbefallda valakten blott varit en bestämd tidpunkt för afsägelse och cooptation af nya medlemmar. I sådana fall förekomma ofta 3 à 4 Borgmästare och hela antalet Rådmän såsom på engång sittande i rätten, i det de derstädes infunno sig efter lägenhet eller möjligen i en viss tur. Deremot befinnes i Stockholm åren 1619—1621 af fyra Borgmästare blott *en* hafva "suttit"[4]).

Under en sådan mångfald af former, af hvilka somliga rymdes inom lagens stadgande, andra öfverträdde detsamma, utvecklade sig Rådsorganisationen i Sveriges städer. Såsom ett temligen allmänt och genomgående drag kunna vi fasthålla den slutsatsen, att under de äldre tiderna en om ock oregelbunden och godtycklig alternation var den förherrskande formen, men att rådsplatserna mot slutet af närvarande tiderymd tenderade till att blifva permanenta och fasta. Härtill medverkade äfven Konungarnes började inblandning i valen af stadsstyrelsen. Att redan de Danska Konungarne i enlighet med de Danska stadsrätterna[5]) här och der tillsatt Borgmästare, är icke osannolikt, ehuru vi icke sett annat exempel derpå än det som inträffade 1520 efter Stockholms blodbad[6]). Gustaf I började i några städer ingripa i det vanliga valsättet: så finner man honom i Stockholm 1523 och 1524 hafva förordnat Borgmästare och Rådmän, liksom äfven 1527 en B. efter förslag[7]); så utnämnde han 1522 Nils Andersson till "varaktig" Borgmästare i Jönköping och förlänade till honom "stad och

1) Ex. anf. af Tidström de Mariæstadio, Winbom de Ulricæhamn, Sundelius Norrköpings Minne, Enebom de Enekopia, Graffman de Strengnesia.

2) Så hafva på 1630-talet af de 12 Rådmännen i Upsala blott 4 suttit hvart år, men deremot Borgmästare-embetena varit fasta. Upsala Tänkeb. å RhusArk.

3) Ex. hos Winbom de Ulricæhamn p. 14, Wangstelius de Thorshälla p. 14.

4) Sthms Embets-bok.

5) Se Kolderup Rosenvinge Saml. af Danske Love V, s. 122 o. 197: Erik XIII:s Priv. för de Sjællandske städ. o. Christoffers Priv. för Roeskilde. Jmfr. Jacobsen a. st. s. 66 ff.

6) Strinnholm Sv. Hist. i sammandrag II, s. 785.

7) Elers a. st. III ss. 205, 208 (efter Ol. Petr. T. B).

hus" jemte Wisingsö [1]). I Stockholm begärde borgarne 1568 af Johan III, att han måtte till Borgmästare förordna några af dem föreslagne samt försörja dem med underhåll, hvilket också skedde. Vidare förordnade samme Konung 1572 en Borgm. i Stockholm, 1590 i Hernösand och 1591 i Öregrund. I Stockholm lät äfven Carl IX 1608 utnämna 4 nya Borgmästare [2]). Någongång hafva Konungarne genom sina Fogdar låtit afsätta Rådsmedlemmar och föranstalta om nytt val [3]). — En genomgripande omorganisation af de hithörande förvirrade och öfverallt olika förhållandena synes hafva föresväfvat Carl IX: åtminstone har han i flera privilegier bragt nya, om ock flerstädes praktiserade, grundsatser å bane. Så skulle enligt Wimmerby privil. 1604 Rådet utses af borgarne sjelfve samt innehafva sina embeten för lifstiden. Enligt de för Fahlun och Sala 1609 uppsatta, men ej utfärdade privil. skulle menigheten deltaga i valet af Rådet, hvaraf halfva antalet skulle väljas nya hvart tredje år, Borgmästarne dock så, att två (i Sala tre) sattes på förslag till Konungens utnämning [4]).

Beträffande Rådets *antal* fastställdes det normala i detta hänseende af St.L. till 6 Borgmästare och 30 Rådmän med tillägg: "den stad, som ej hafver så ämne å mannom, han hafve minna tal, epter thy han förmår." Samma medgifvande förekommer äfven i den senare lydelsen, som föreskrifver 4 B. och 24 R. Sistnämnda förändring innehålles visserligen i samma kapitel, som tillkom i följd af Tyskarnes uteslutande, och synes derföre vara samtidig med detta, men att hon inträffat vida tidigare, blir sannolikt, då man besinnar, att det förmodligen från Wisby St.L. [5]) upptagna Rådstalet utan tvifvel rätt

---

1) Wieselgren Ny Smålands Beskrifn. III, s. 3.

2) RRegistr. — Äfven Stadsskrifvare hafva af Konungen blifvit förordnade: så 1579 i Öregrund, 1597 i Hudiksvall.

3) Så skeddei Upsala med begge Borgmästarne 1583 (Ups. Priv. Bok): Fogden skulle "samt med den *menige man* utvälja två eller tre beskedlige män af Borgerskapet eller Kon:s egne tjenare, som kunna vara skicklige, och de förnämste af menigheten ock sämber." I Wiborg skulle Fogden 1562 afsätta Borgm. och i stället förordna 2 andre. RRegistr.

4) Jmfr. Bidrag till Sv. Städernas etc. s. 44, 45.

5) Dervid märkes dock, att Borgmästare blott på ett ställe i W. St.L. omnämnes (II, 10) och då i Singularis: hvaremot i Lübeck verkligen funnos sex Borgm. (ehuru blott två sittande). Rådmännens antal åter var derstädes vida större: de sittande voro omkr. 20 à 25. I Hamburg äfvenledes omkr. 20. I Stralsund och några andra Pommerska städer var samtliga Rådets antal fastställdt till 24. Se Frensdorff s. 101 och följ.

snart visade sig öfverstiga våra städers höfva[1]) och derföre genom praxis och öfverenskommelse minskades, hvarefter stadgandet utan kunglig sanktion snart förändrades äfven i lagböckerna. Dertill kommer den slutsats, som man kan draga af det förenämnda Kbr. 1459 till Hedemora stad, i hvilket det förunnas innevånarne "att bruka *half* stadsrätt, sådan som våra städer Strengnäs och Köping hafva, i så måtto att de utkesa och hafva två Borgm. och sex Rådmän" o. s. v. Häraf synes nämnda förändring vara äldre än 1459, likväl så, att densamma aldrig blef påbuden offentligen för alla städer[2]), hvarföre det gamla stadgandet på några ställen möjligen qvarstod: åtminstone finner man i Westerås någongång 6 Borgmästare (3 sittande och 3 Seniores)[3]), i Arboga omvexlade samma sex Borgmästare åren 1573—89, i sistnämnde stad funnos någongång 5 Borgm.[4]), liksom äfven i Norrköping 1477[5]). För öfrigt är Rådsmedlemmarnes antal oändligt vexlande i olika städer, liksom äfven i samma stad; dessutom är det svårt att ur stadsprotokollerna härleda några bestämda uppgifter i detta hänseende, då ej alltid skilnad göres mellan det sittande och det gamla Rådet. Så finner man Borgmästarnes antal vexla från 1 till 6, Rådmännens från 4 till 28[6]). Det sittande Rådet har dock äfven i de mindre städerna sällan understigit två Borgmästare och 4—8 Rådmän, hvilket man kan antaga som det vanliga och normala. I Stockholm finner man 1420 i sittande Råd 4 Borgmästare och 17 Rådmän, 1477 ungefär lika antal[7]), 1516—1520 två B., 1524 funnos der inalles 4 Borgmästare och 16 Rådmän. Det sittande Rådets antal förblef under den följande tiden omkr. 2 B. och 10 à 12 R.; samtliga Rådet uppgick sällan högre än till 3 à 4 B. och 15 à 17 R.[8]). Hvad de

1) Så heter det i K. Christoffers bref till Wadstena, att der finnas flera Borgmästare och Rådmän, än behof göres, "och kommer det hvarken oss eller klostret till någon fromma, men heldre vår menighet till stor tunga och svårhet."

2) För enskilta städer blef Rådets antal genom K. bref fastställdt: så till 4 Borgm. och 8 Rådm. för Wadstena genom K. Christoffer, till 4 Borgm. och 24 Rådmän för Kalmar 1524 (Löfgren, I, s. 104), för Stockholm 1568 (Palmsch. Top. XIV och RRegistr.).

3) Wicander Disp. de Arosia Ups. 1720, 22. Grau Beskr. öfver Westmanland s. 148.

4) Lohman a. st. s. 135.

5) Sundelius a. st. s. 459.

6) Fyra var det vanliga Rådmanstalet i Jönköping 1456—1548, 28 förekomma i Kalmar 1389, förmodligen äfven innefattande det gamla Rådet. Se Handl. Skand. Hist. XXXII s. 431, Löfgren a. st. I, s. 54.

7) Palmschöld Top. VI.

8) Sthms stads Tänkeböcker och Embetsbok (den senare går från 1582).

öfriga städerna beträffar, finner man ett antal af 4 Borgmästare [1]) i Kalmar 1389, i Norrköping 1380, 1406, 1417, 1425, i Örebro 1616, i Wiborg 1480, i Arboga 1401, 1412, 1452, 1482, 1616, i Lidköping 1578, i Mariestad 1615, i Enköping [2]) 1598—1609, i Sigtuna 1510 o. s. v. Ungefär lika ofta förekomma tre Borgmästare samtidigt [3]).

b) *Rådets Funktioner.*

En kommunalstyrelse kan i sin verksamhet betraktas från två sidor, dels såsom kommunens *representant* och *organ* i förhållande till andra personligheter, som handlar å kommunens vägnar samt vårdar och förvaltar hans rättigheter, dels såsom hans *öfverhet*, som handhafver och upprätthåller ordning och rätt bland hans egna medlemmar. I förra fallet visar sig Rådets betydelse och myndighet i Sverige mycket inskränkt, om man jemför förhållandet i Tyskland, der många städer spelade rolen af stater, der följaktligen kommunen på mångfaldigt sätt deltog i de *politiska* förvecklingarne. Hos oss kunde detta blott sällan komma i fråga, ehuru några exempel derpå finnas från det revolutionära 1400-talet, hvad Stockholm beträffar. Denna orts rikedom och betydenhet gjorde det angeläget för alla partier att vinna dess myndiga Råd, hvarföre man finner detsamma uppträda å stadens vägnar i flera riksvigtiga angelägenheter och på Herredagar [4]), ja till och med afsluta högtidliga förlikningar med Regeringen [5]) samt utfärda skrifvelser till städer, landskap eller stånd med uppmaning till trohet eller affall [6]). Af Stockholms Råd eller andra utskickade hafva sedermera ofta blifvit utfärdade de beslut, som på Samtingsmarknader eller

1) D. v. s. tjenstgörande alla 4 på en gång, ehuru det ofta är omöjligt att med visshet afgöra.

2) Här beslöts det af Råd och menighet på Walborgsmässo Rådstuga 1598, att Borgm.embetet hädanefter skulle utöfvas af 4. Enebom l. c. p. 80.

3) Så i Norrköping 1437, 1480, 1513, 1577, 1610; i Arboga 1440, 1462; i Gefle 1521, 1584; i Lidköping 1573; i Bogesund 1618 o. s. v. — Ofvanstående uppgifter äro hämtade dels ur städernas Tänkeböcker, dels ur anf. stadsbeskrifningar och disputationer.

4) Se t. ex. Ekdahl a. st. IV, s. 1413, 1416.

5) 1464 förlikning mellan R.Råd och Borgm. samt Råd i Stockholm, "så att den ovilja och tvedrägt, som varit hafver, skall vara aflagd." Palmschöld Top. V — flere ex. hos Hadorph Bih. till Rimkrön., Ekdahl a. st. flerstädes. Inom Stockholms Råd fann Sten Sture d. ä. 1497 häftiga motståndare, och hans åtgärder klandrades på det skarpaste vid öfverläggningar å Rådstugan. Sthms Tänkebok (utdrag ur denna för åren 1478—1513 finnas i Nordinska saml.).

6) Ex. hos Ekdahl a. st. s. 1338, 1340, 1353.

andra städernas möten af deras representanter fattades [1]). Genom 1436 års Privilegier fick Stockholms Råd till och med öfverinseendet med rikets *myntväsen* [2]). Äfven med utländska städer finner man Rådet i Stockholm vid flera tillfällen hafva omedelbarligen underhandlat, utfärdat skrifvelser eller afslutat kommerciella fördrag [3]). Hyllningsbref och trohetsreversaler hafva ofta afgifvits af städernas magistrater [4]). För öfrigt var Rådet eller dess deputerade kommunens sjelfskrifna representanter vid hvarje hans uppträdande inför Regeringsmakten, vare sig det skedde skriftligen eller personligen. Det senare förekommer under närvarande tiderymd ofta; mot slutet deraf blifva skriftvexlingarne tätare. Vid dessa förhandlingar med den högsta makten [5]) finner man vanligen bredvid Borgmästare och Råd äfven nämnas menigheten eller ombud deraf.

Till denna sida af Rådets verksamhet hörde vidare såsom en maktpåliggande funktion upprätthållandet och *bevakandet af stadens rätt och privilegier*, dels emot Konungens Befallningsmän, dels mot andra kommuner, dels mot enskilte. Hvad de förstnämnde beträffar, synes deras ställning i detta afseende blifvit olika uppfattad under olika tider: ända till slutet af 1500-talet förekommer i de fleste privil.bref ett förbud för Konungens befallningsmän att på något sätt "hindra eller qvälja" staden i privilegiets fria begagnande, liksom om intrång naturligen vore att af dem befara: deremot föreskrifves i Gust. Adolfs Ståthållare-Instruktioner såsom en skyldighet för desse embetsmän att *skydda* städerna i deras lag, rätt och välfångna privilegier [6]). —Hvad de *interkommunala förhållandena* beträffar, finner man i äldre tider mera sällan konflikter *städer emellan:* en sådan tvist angående privilegier mellan Wisby och Stockholm blef af Magnus Eriksson bilagd

1) Så 1529, 1559 m. fl. se Stiernman Comm. Pol. OEcon.stadg. I, ss. 21, 161.

2) "När mynt skall slås i Sverige, skall det sättas Borgm. och Råd i Sthm i händer, att de det så styra och förvara, att det så blifver, som det pålagdt varder." Jfr ett Sten Stures bref af 1479, hvaraf synes, att myntordningen bestämts af Stockholms jemte Rikets Råd. Nordin. Saml.

3) Så med Lübeck 1526 (Fant Handl. Sv. Hist. I, s. 28), de Danska städerna i gemen 1520 (Ekdahl a. st. s. 1330).

4) Ex. för Kalmar 1389: Löfgren a. st. I, s. 54; för Jönköping 1529: Thyselius Handl. rör. Gust. I:s regering I. 237; för Stockholm 1363, der Rådet utlofvar trohet "pro parte nostra et omnium nostrorum comburgensium": Styffe anf. Bidrag s. 44.

5) Ett stort antal af dessa rörde de kungliga skatterättigheterna i kommunen, för hvilka Rådet såsom stadens representant skulle ansvara.

6) Saml. af Instr. s. 105—6 o. s. v.

1342 [1]). Då genom Stadslagen de nordliga städerna i Sverige och Finland blifvit till förmån för Stockholm och Åbo inskränkta i sin fria seglats, blef detta ett uppslag till handelstvister, hvilka från 1500 blefvo tätt återkommande, genom Johan III:s och Carl IX:s många prohibitiva förordningar ytterligare växte och slutligen genom Gustaf Adolfs Handelsordinantie fördes till sin höjdpunkt. Sådane klagomål utfördes af Rådet, dels genom enskilta beskickningar och supplikationer, dels och isynnerhet å Herredagar och Riksdagar medelst besvär, hvaröfver vanligen utfärdades kungliga resolutioner. Detta hade blott undantagsvis inträffat under 1400- [2]) och 1500-talet; från Gustaf Adolfs regering blef det allmännare och efter 1633 finner man reguliert vid hvarje Riksdag eller Utskottsmöte alla Sveriges städer (som der varit representerade) hafva inlemnat besvärspunkter och oftast erhållit resolution derå. Dessa punkter uppsattes af Rådet och upplästes vanligen sedermera för menigheten, hvarvid i somliga städer de enskilte fingo göra sina anmärkningar och föreslå nya punkter. På samma sätt utsågos äfven af Rådet i första hand stadens målsmän vid riksmötena, ehuru i de flesta Sveriges städer praxis var att tillika inhemta menighetens bifall [3]).

Äfven med *landtkommunerna* finner man ganska tidigt, att Rådet råkat i stridigheter angående stadens privilegier i jordar och lägenheter [4]) o. a. d.; hvarmed vi hafve vidrört en annan hithörande funktion för Rådet, nemligen att vårda och *förvalta stadens jord och grund*, hvilken i alla senare städer helt och hållet och i de gamla till en del var kunglig donation. Fördelningen och dispositionen deraf bland borgarne blef än uppdragen åt Befallningsmannen, än åt Rådet, än åt båda [5]). Att stor försumlighet och oreda samt många missbruk under 1500-talet genom myndigheternas slapphet inritat sig i dessa förhållanden, finner man af K.br., samt af de jordrefningar, som längre fram måste vidtagas i ett stort antal städer [6]).

---

1) Palmsch. Top. XIV.

2) Ex. derpå från 1400-talet i Stockholms Tänkeböcker.

3) Vi sluta dertill af den praxis, som herrskade något senare, från och med 1620-talet.

4) Ex. i Kbr. till Norrköpings stad af 1384, 1455, 1485, 1538 (se Hertzm. o. Ringb. a. st. I, s. 29, II s. 11—13); Dombref vid lagm.ting i Upsala 1458 (Stadens Priv.bok) m. fl.

5) Se t. ex. Priv. för Hjo 1610, för Wiborg 1607 m. fl. Byfogden eller Kämnärerne hafva någongång äfven haft befattning härmed, se Enebom l. c. p. 74. Anf. Saml. af Instructioner.

6) En sådan allmän refning af städernas jord anbefalltes Ståthållarne i Memo-

Hit hör slutligen äfven Rådets befogenhet att upptaga nya medlemmar i kommunen eller att *meddela burskap* under de af lagen föreskrifna vilkor (hvarom mer framdeles) och enligt senare skråförfattningar i samråd med skrånas föreståndare [1]), äfvensom att meddela s. k. burabref och geburtsbref under stadens sigill [2]) åt dem, som begåfvo sig utrikes, samt utfärda stadsbref å fastighetsförvärf m. m. [3]). — I flere af ofvannämnde befattningar, såsom burskaps meddelande m. fl., finner man Fogden nämnas bredvid Rådet såsom lika bemyndigad, och det är först sent, under 1600-talet, som bestämdare gränsor uppdrogos mellan den kungliga och den kommunala myndigheten i dessa likasom andra hänseenden.

Vända vi oss nu till den andra sidan af Rådets verksamhet, den uti hvilken detsamma framträder såsom kommunens öfverhet, såsom den organiserande och befallande makten, så finne vi här ett vidsträckt fält, en stor mångfald af yttringar. Vi vilja derföre betrakta denna sida under vissa synpunkter fördelad. — Vid undersökningen om den historiska uppkomsten af Rådsmyndigheten hafve vi funnit det första ursprunget till det *egentliga* Rådet framträda i behofvet af en viss ordning och politi inom de många nya förhållanden, som af stadslifvet blifvit en följd. Genom detta senares utbildning fick denna *administrativa* funktion en ganska vidsträckt verksamhetskrets, då till hennes fullständiga utöfvande erfordrades, att kunna vid behof utfärda statuter och politi-förordningar, d. v. s. en viss inskränktare lagstiftningsmakt, samt vidare att kunna för allmänna ändamål till det gemensamma bästa pålägga staden nödvändiga kommunalafgifter d. v. s. en viss beskattningsmakt. Med denna administrativa myndighet förenade sig småningom *den dömande*, genom en efter Tyskt mönster gjord omskapning af den Svenska nämnden till ett i all dom deltagande Råd. Slutligen tillkom äfven af naturliga skäl och genom sakens egen nödvändighet en viss *exekutiv* myndighet, ehuru vi skola finna, att denna i lagen mer förutsättes än uttryckligen medgifves.

---

rialet af $^{6}/_{4}$ 1620 till utrönande af den rätt, under hvilken denna jord innehades. Anf. Saml. af Instr. s. 134—35.

1) Se Klemming Skråordningar (i Fornskriftssällskapets Handl.) s. 62, 80 m. fl.

2) De förra omtalas i St.L. KgB. XV, § 11. De senare i städernas tänkeböcker på åtskilliga ställen. Dylika fingo enl. Stockholms priv. $^{13}/_{7}$ 1594 § 24 icke utfärdas af Ståthåll. eller Befalln.man, utan blott af Borgm. och Råd.

3) JordaB. VI, Rådst.B. XXIX.

aa) *Rådets administrativa myndighet (politi och ekonomi).*

Denna, som enligt St.L. och senare förordningar omfattade en stor mångfald af ämnen, hade, som vi nämnde, sin egentliga utgångspunkt i de för stadslifvet egendomliga förhållanden, som framkallades af *handel* och *rörelse*. Dessas reglerande eller allt hvad till handelspolitien hörer framstår således som Rådets första befattning, kring hvilken de öfriga gruppera sig. Grundvalen för dessa förhållanden var laggd genom St.L:s Köpmåla och Skipmåla Balkar: den förra innebär ett uppslag till den stränga prohibitism, som senare gjorde sig gällande på detta område [1]). Rådets äldsta funktioner i detta hänseende voro de som rörde uppsigten öfver mått och vigt, förköp m. m. Dessutom är det i St.L. uttryckligen ålagdt Rådet jemte Fogden att hafva inseende öfver flärd och falskhet i handel, reglera öl- och vinförsäljningen, samt tillse, att icke vissa nödvändighetsvaror bortfördes från staden "Allmoganom till skada" [2]). Rådets hithörande skyldigheter inskärptes sedermera genom en stor mängd författningar och privilegiibref: ständigt återkommande i dessa äro förbuden mot landsköp och olaga hamnar, olaglig handel i städerna af in- eller utländske samt understucken köpslagan med utländingars varor eller penningar. Landsköp var såväl i St.L. som senare förordningar i första hand ställdt under Fogdens uppsigt [3]) för de Konungsliga böternas skull och emedan den senare ofta hade äfven med landet att göra, kanske ock till förekommande af partiskhet för stadsboarne, men Rådet skulle dock i denna uppsigt deltaga; så skulle enligt Privil. för Jönköping 1524 Rådet derstädes hafva makt att i fall af försumlighet å Konungens Befallningsmäns sida "förfölja samma vårt bud lika med Fogdarne, hvar så behöfves" [4]), och i K.br. för Stockholms stad af 1589 meddelades Rådet i samma händelse "fullkomlig lof och tillstånd sådana att fängsla och straffa låta" [5]). — Till och med borgarne berättigades flerstädes att lägga qvarstad på det förbrutna godset, sjelfve eller genom utsän-

---

1) Äfven häri utgjorde dock St.L. tillika en fixering och utbildning af gällande förhållanden: se Förf:s Bidrag etc. s. 20 ff.

2) Kpml.B. III, XXV, XXVI, XXXI. Rådet utöfvade således på det kommerciella området en myndighet, som i senare tider blott ansetts tillkomma Regeringen: så finner man Stockholms Råd hafva utfärdat förbud mot spanmåls utförsel (Tänkebok f. 1592) o. s. v.

3) Kpm.B. XXIII; en stor mängd Kon.bref.

4) Stiernman Comm. Pol. OEcon.stadg. I, s. 9.

5) Palmsch. Top. XIV.

de[1]). — Rådet jemte Konungens Befallningsmän skulle dessutom sätta köp på hvarjehanda främmande varor, innan det fick köpslås derom. Sådane voro under äldre tider egentligen vin och främmande drycker, å hvilka taxa skulle utfärdas[2]). Detta utsträcktes småningom äfven till andra in- eller utländska varor, men ehuru för en och annan stad ovillkorligt påbudet[3]), kunde det i följd af köpmännens motstånd ej genomföras. Så befalltes Rådet med menigheten i Stockholm 1592 att sätta köp på åtskilliga nödvändighetsvaror till lindrande af den dyra tiden och myntets npphjelpande. Efter oupphörliga sammankomster derom å Rådhuset och slottet måste man slutligen afstå från förslaget[4]).

Hit hör äfven Rådets uppsigt öfver *handtverken* och *skråförfattningarne*, en befattning, som vid prohibitismens hastiga tillväxt blef allt vigtigare och mera omfattande. Man har ej någon visshet om tillvaron af handtverksskrån före St.L., men att sådane redan då funnits, göres sannolikt dels deraf att gillen redan längesedan hos oss bildat sig, dels af Tyskarnes i början af 1300-talet betydliga insteg, dels af en enskilt författning af 1356, enligt hvilken Skräddareembetet privilegierades med fullständigt skråsystem[5]). Grundläggningen till dettas allmänna införande blef mellertid gifven genom St.L:s föreskrift, att hvar handtverkare skulle strängt hålla sig inom sitt yrke[6]). Enligt St.L. inskränkte sig Rådets befattning med handtverken dertill, att det jemte Fogden skulle en gång hvarje månad "gärning thera fornempdo manna, som Skräddare och Skomakare och allehanda gärningsmän, wyrda och läggia efter thy the pröfva tidherna vara", och

---

1) K. Br. af $^{21}/_{2}$ 1587 till Jönköping. Enl. priv. för Stockholm 1594 § 21 var det borgarne tillåtet att "qvarsättia det gods till rätta", hvarmed olaglig handel drefs, och enl. priv. f. Hedemora af 1582 egde de, att lägga beslag på sådant gods och deraf behålla $^{1}/_{3}$ (jfr Priv. f. Åbo $^{8}/_{2}$ 1616). Så äfven Sthms borgare enl. Kbr. om Norrl. seglat. 1589. (Enl. Åbo Privil. 1525 skulle landsköpsvaror, som beslogos på landet, vara Konungens ensak, skedde det i staden, undfick den senare hälften).

2) Kpml.B. XXV, XXVI. Redan St.L. utsätter bestämdt pris på vissa ölsorter (Kpml.B. XXIX). Detta påbud upprepades sedermera ofta: se Kalmare Recéss 1474 § 17, K. bref och mandater af 1572, 1575, 1580 (se Stiernman a. st. I, ss. 224, 244, 295. Enl. St.L. fick hvem som helst utsälja dylika varor (Kpml.B. XXVI), men enl. senare förordningar skulle Krögare och Vintappare tillsättas i alla städer.

3) Norrköp. Priv. af 1609 § 6 (Hertzm. och Ringb. II, s. 25).

4) Palmsch. Top. XV (ur Stockholms Tänkebok).

5) Jfr anf. Bidrag t. Sv. Städernas etc. s. 33—35. Klemming a. st. s. 120.

6) KgB. XXI.

den "annorledis än the föreläggia" säljer, pliktar 3 mark [1]). Gör någon "fals å sine gärning", kunna Fogde och Råd bestämma deröfver, huru de vilja. — Genom de följande skråförfattningarne blef burskapsrätten för handtverkare betydligt modifierad: redan enligt det nämnda skrået af 1356 fordrades för burskap inom yrket, att ega till 20 mark Sv. samt att "tillkesas till mästareembete" af Borgmästarne samt yrkets förmän. Från början af 1400-talet och sedermera allt framgent hafva skråförfattningar blifvit utfärdade för de flesta yrken i Stockholm samt derifrån småningom utsträckta till landsortsstädernas handtverkare [2]). Som i lagen naturligtvis ingenting förekommer om rättigheten att meddela dylika privilegier, finner man mycken osäkerhet och obestämdhet i detta hänseende. Under äldre tider hafva dylika vanligen blifvit meddelade af Rådet [3]), stundom in pleno [4]) stundom blott det sittande [5]), än med än utan Fogdens samråd [6]). Någongång finner man äfven under äldre tider konungen sjelf hafva utfärdat skrån: detta blir vanligt från Johan III:s regering. Förändringar af skrån skulle efter beslut inom yrket först tillkännages för sittande Råd och sedan inskrifvas af edsvurna Rådskrifvare enligt Rådets föreskrift [7]). Grunddragen

---

1) Denna värdering modifierades sedermera: i Carl IX:s Hertigdöme skulle hon en gång om året fullgöras af Befalln.män, Borgm. o. Råd med embetenas Åldermän, i Stockholm öfvergick hon till särskilta embetsmän, som kallades Förmyndare eller Bisittare för Embetena. (Se Sthms Emb.böcker. Jfr längre fram). Embetena sjelfva synas hafva fått ett stort inflytande på dessa värderingar, hvilka oftast verkställdes för längre tider i sänder. Jmfr. Flintberg Städers förmoner o. skyldigh. s. 30, Embetsboock udj Stockholm 1546, (Klemming a. st. s. 310), Mandat om köpeordningen på alla varor 1573 (Stiernman a. st. s. 230). Ordin. på alla embetens i Sthm köp och arbetslön af sjelfva Emb. hvart för sig bevilligat 1574 (Palmsch. Top. XIV och Klemming s. 326). Äfven Regeringen sjelf har stundom utfärdat dylika taxor.

2) Någongång blefvo dessa ställde under Stockholmsskråna (så skulle enl. förordn. 1529 Uplandsstädernas Guldsmeder lyda under Verkmästaren i Stockholm). Stundom fingo de egna privilegier och skrån efter Stockholms mönster (isynn. genom Carl IX), se hans allmänna förordning af 1576 (Stiernman a. st. s. 261), hans priv. f. Skomak. i Nyköping 1577, f. Skrädd. d:o 1587, f. handtverkarne i Arboga 1607 (Stiernman ss. 287, 346, 519).

3) Såsom ex. anföra vi ingressen till Bagarenas skrå från början af 1500-talet: "Vi efterskrifne Borgm. med vårt kära Råds råd, fullbordan och samtycke hafve låtit dikta, skrifva och sammansätta Bagarne en Skrå och Rättelsebok." Klemming.

4) Klemming s. 61, 77, 88, 116, 211.

5) D:o ss. 30, 87.

6) D:o ss. 31, 87, 119, 191.

7) Skråna förekomma äfven under benämningen lagböcker, Rätteböcker.

af yrkenas författning voro i korthet följande. De stodo under närmaste ledning af en eller flera Åldermän, hvilka utsågos årligen [1]), vanligen vid Valborgsmässan och af yrkesbröderna sjelfva, men i somliga handtverk af Borgmästare och Råd på hvilken tid som helst [2]). Åldermännen, som hade till biträde vanligen två bisittare, skulle vårda skråets angelägenheter, kontrollera arbetets godhet och föra ordet vid de allmänna "stempnorna", hvilka dock äfven stodo under Rådets kontroll och derföre måste bevistas af två Rådmän, om besluten skulle blifva lagliga [3]). För öfrigt voro de större skråna försedda äfven med särskilta Kämnärer (skattmästare), tänkeböcker o. s. v. Hela skråväsendet med thy åtföljande nya åligganden, såsom uppsigt öfver arbetenas godhet, öfver intrång i privilegierna, öfver oordningar inom yrkena m. m. [4]) underordnades nu Rådet.

En följd af den alltmer tilltagande exklusiviteten inom stadslifvets förhållanden blef Rådets åliggande att noga tillse, det alla stadens innevånare hade sin ordentliga *näring* och att från staden förvisa allt "löst parti", som ej försörjde sig på ett tillfredsställande sätt. Härom skulle enligt senare privilegiibref ransakning anställas af Borgmästare och Råd, hvilka det äfven ålåg att tillse, det alla näringsidkande utgjorde sina utlagor och ej under hvarjehanda förevändningar undandrogo sig desamma. Hit hör äfven skyldigheten att hafva inseende öfver de *enskiltas* tomter och fasta egendom, att de icke kommo i händerna på obehöriga personer såsom Adel och konungatjenare eller utländingar, och derigenom vare sig för kommunen eller staten någon skada uppstode. Härom förekommer dock ingenting i St.L.; först kring medlet af 1500-talet börja förordningar utfärdas häremot. Vi återkomma längre fram till dessa punkter.

Bland Rådets första omsorger såsom den allmänna ordningens handhafvare kan räknas dess öfverinseende öfver stadens *byggnadsväsende*, *gator*, *broar*, *renhållning* o. s. v. Enligt St.L. skulle vid hvarje byggnadsföretag tillkallas de Rådet underordnade tvenne Byggmästarne: längre fram hör man omtalas andra stadens embetsmän

1) En del skrån föreskrifva, att hvardera af de två Åldermännen skulle sitta i två år och en väljas ny hvart år a. st. s. 263, somlige, att Åldermannen skulle väljas ny hvart tredje år s. 251. I Murareyrket skulle Åldermannen 2 år vara en Svensk, men det 3:dje en Tysk s. 89.

2) a. st. ss. 95, 144, 194, 263; 241.

3) a. st. ss. 24, 154, 186, 194. För Arboga handtv. föreskrefvos 1607 4 "Embetessamqväm" om året.

4) Enligt Priv. f. Åbo och Wiborg $^8/_2$ 1616 skulle Borgm. och Råd till och med ansvara för att staden förseges med nödigt antal handtverkare.

såsom Tomtmätare, Syllesättare o. a., hvilka dervid skulle biträda. Byggnadstvister afgjordes genom 4 af Rådet förordnade män, vare sig dess egna medlemmar eller andre [1]). Alla hithörande förhållanden voro under äldre tider Rådets ensak, från Gustaf I blefvo de äfven föremål för Regeringens omsorg. Vi hafve förut omnämnt de af honom utfärdade Ordinantierna för Wiborg och Stockholm samt deras innehåll, äfvensom Johan III:s statuter för den senare staden af 1570. Förordningar i dessa ämnen utgåfvos af Johan III till stort antal, isynnerhet för residensstaden, och det fortgick så till dess Öfverståthållare-embetet inrättades, då alla dylika förhållanden, åt hans uppsigt öfverlemnades. Under äldre tider plägade de vigtigaste punkterna af lagens hithörande stadganden jemte senare tillägg uppläsas årligen vid burspråken, då äfven nya öfverenskommelser gjordes: längre fram skedde detsamma å Walborgsmässorådstugan.

Deri ingick äfven såsom en hufvudsak allt hvad till *stadens säkerhet* hörde, såsom eldsläckningsanstalter och vakthållning. Beträffande de förra skulle enligt St.L. Borgm. och Råd jemte Fogden och stadens 8 Höfvidsmän [2] fyra gånger om året besigtiga brandredskapen [3]; i Stockholm voro äfven Dragarne under Kämnärernas uppsigt förpligtade att biträda höfvidsmännen i detta afseende [4]). "Vård och vaku" skulle enligt St.L. bestridas af alla byamän [5]) i tur och ordning. De tjenstgörande kallades Vårdmän [6]) och stodo på somliga ställen under uppsigt af årligen valde s. k. Vålleskådare (Vårdskådare [7]). Någon allmän beväpning af borgerskapet eller militärisk organisation föreskrifves ej af St.L.; denna har väl så småningom uppkommit ur den allmänna vaktskyldigheten, då tidernas oro öfverallt framkallade allvarsammare försvarsåtgärder och nödgade till allmän borgarebeväp-

1) ByggnB. IX.

2) Eller Brandmästare, som de i Tänkeböckerna ofta kallas. De förekomma äfven under benämningen Qvartermästare, ehuru dessa sedermera blefvo särskilta embetsmän för borgarebeväpningen. — I Stockholm fullgjordes brandsynen under 1400-talet vanl. af några Rådmän jemte hvarje qvarters föreståndare: för hvarje gård erfordrades "en föran dräng i huset, vattentunnor för portarne, vattubaljor på taken, så och ämbar till rede och kexe." Sthms Tänkeböcker.

3) St.L. ByggnB. XXII.

4) Stockholms Tänkeb. från 1500-talet.

5) KgB. XV § 12.

6) ByggnB. XXII jfr KpmB. XXX (Åtskilln.).

7) Se t. ex. Arboga stads T.B. i Svea Hofr. Ark. Jmfr Sthms Statuter 1570 § 23.

ning [1]). I Stockholm öfverenskommos 1598 mellan Ståthållare, Befallningsmän, Råd och Menighet 33 punkter, hvarigenom hithörande förhållanden fullt ordnades [2]), i det stadens fänikor förseddes med befäl [3]) och ställdes på militärisk fot. — Till stadens säkerhet lände äfven uppsigten öfver alla främlingar, hvilka värdarne voro skyldiga för Rådet anmäla [4]), ja, 1569 förböds det till och med *vid lifsstraff* att hysa okända personer [5]). Ändtligen skulle Rådet äfven vaka öfver stadens fortskaffningsmedel: tillsätta (enl. St.L. minst två) Tavernare [6]) och hålla uppsigt med dem.

Till administrationen kan äfven räknas Rådets åliggande att inom kommunen upprätthålla *friden* och *den allmänna rättssäkerheten:* för detta ändamål var Rådet berättigadt till flerahanda åtgärder. Till en början var det af St.L. förbudet alla andra än Hofmän och de Byamän, som besutto eget arf, att under fred bära "Stekametz eller annor vapen" [7]) inom stadens område. I Nylödöse förbödo Privil. 1573 § 22 att bära "färdelsvärjor" med straff af torn och jern på en månad, eller lifvets förlust, om någon skada dermed gjordes [8]). Uppkom tvist mellan byamän, som innebar vådor för den allmänna säkerheten, hade Rådet jemte Fogden rättighet att lysa frid dem emellan, så att "ingendera skulle den andre qvälja i ord eller gerningar" vid vite af 40 mark eller ock vid lif och gods [9]). Vidare egde Rådet att utfärda lejdebref med uppgift af ändamålet med detsamma [10]). — Öfver sina underordnades uppförande skulle såväl Fogden som Rådet hålla noggrann uppsigt och straffa dem

1) Redan på 1400-talet skulle vid brandsynen äfven ransakas om borgarnes harnesk och värjor m. m. (Stockholms T.B.) och staden underhöll flera militäriska tjenstemän såsom Bysseskytter, Pulvermakare m. fl.

2) Palmsch. Top. VI och XV.

3) Utgjordes till en början af 1 Höfvidsman (kallades 1612 Stadens Hopman) med sin "Luthenant", en Öfverste-vaktmästare, 7 Krigsråd, 2 Fennikar (Fänrikar) med hvar sin Luthenant, 1 Rumormästare, 8 Qvartermästare, 1 Förer, 1 Munsterskrifvare, 4 Brandmästare, 4 Rådmän och 4 Borgare samt 1 profoss.

4) Både för Slottsfogden och Borgmästarne enligt Stockholms Statuter 1570 § 28; afresan skulle anmälas för Slottsfogden.

5) RRegistr.

6) KgB. XIII. I Stockholm förordnades vanl. 2 Tavernare för hvart och ett af de 4 qvarteren.

7) RådstB. XXXIV. Inför rätten fick ingen uppträda med värja.

8) Nordin. Saml.

9) RådstB. XIV. Detta kallas ofta i Tänkeböckerna att lysa Konungsfrid: vitena voro olika, så förekomma 100 D. hvitt mynt till Kon:s ensak, 500 D. o. s. v.

10) KgB. XXIV. Enl. Priv. af 1436 skulle ingen "leigdas eller felias" in i Stockholms stad utan Rådets samtycke.

"som andre män och ingen nåde medh them göra"[1]). Å andra sidan voro äfven Fogden och Rådet jemte alla som användes i stadens tjenst genom högre straffbestämmelser skyddade för öfvervåld: den olofligen talar om Fogde eller Råd, böte efter olika gradationer[2]) eller i brist derpå "warde slagin wider stupona och flye sidhan stadhen", kommer han åter, miste tungan[3]). Härtill lades i senare förordningar flera höjda straffbestämmelser: så stadgades 1357, att de som göra "flock och sampnad" på Fogden och Rådet eller en deribland, skola mista lifvet; tillkommer dråp eller misshandling, miste de lif och gods, det senare konungens ensak[4]). Dessa lagbud blefvo sedermera genom enskilta privilegier upprepade och skärpta[5]). — För den allmänna säkerheten till egendom skulle Rådet från Staden förvisa alla afstraffade tjufvar, som stulit två öre eller derutöfver; kommo de åter, miste de lifvet[6]). Vidare egde Borgmäst. och Råd att för gäld bysätta alla[7]) utom Konungens Råd eller sändemän, Riddare och Prester; bysättningen kunde dock blott ske genom två byamän[8]). Genom privilegier fritogos dock bofaste borgare i vissa städer (t. ex. Stockholm, Lödöse) från allt slags häktelse utom i högmåls- och edsörebrott[9]). Slutligen erhöll Rådet i några städer med anledning af Adelns missbruk och öfvervåld i gästning[10]) rättigheten[11]) att med Fogdens biträde i fängsligt förvar för-

1) RådstB. XXXIII.

2) Högre böter för lastande af Borgmästaren och inför sittande Råd.

3) KgB. XII: den som falskeligen sätter i gång elakt rykte om Fogde eller Råd, böte 80 mark eller miste hufvudet.

4) Edsöre B. XXVII.

5) T. ex. i Stockholms priv. 1456, 1529, 1563 § 37: öfverfaller någon Borgmäst. och Råd med hugg och slag, miste lifvet; antastar han dem falskeligen till heder och ära, blifve ärelös och straffes efter St L., brukar han "onyttig mun" mot dem, straffes med fängelse. Lika lyd. i Norrköpings Priv. $^1/_{12}$ 1572 § 9, i Upsalas af 1570 § 11 och Nylödöses af 1573 § 21.

6) Tj.B. III. Samma behandling voro de underkastade, som röfvat sig hustru. GftmB. V.

7) Särskilt nämnes i Stockholms Priv. 1563 § 26: köpmän, bönder och annat folk.

8) RådstB. XVIII. För landtmän, som i staden hotades med bysättning, skulle Fogden till vidare gå i borgen, d:o XXIII, utländingar skulle hållas i "stadsens gömmo", tills deras gods kom.

9) Se Priv. f. Stockholm 1494 § 1, 1563 § 30, 1570 § 13 o. Priv. för Nylödöse 1573 § 17.

10) Ang. våldgästningen i städerna jmfr Priv. f. Upsala 1570 § 9, Kongl. Patentet af 1572 (Schmedeman s. 57), Priv. för Norrköping 1592 § 8 och 1609 § 10 m. fl.

11) T. ex. i Stockholm genom K. Br. $^{19}/_{7}$ 1585.

sätta alla, som utan Konungens bref pockade på fri gästning och skjuts i städerna [1].

I sammanhang med Rådets nu anförda befogenhet står äfven dess skyldighet att vaka öfver tukt och *offentlig sedlighet* inom staden, ett fält, der Rådet var i tillfälle att betydligt utvidga sin myndighet och äfven inkränga på det enskilta lifvets område. Uppslaget härtill var gifvet genom St.L., som innehåller den första detaljerade förordning mot öfverflöd och lyx i mat och klädedrägt [2]), förmodligen till största delen hämtad från Lübska rätten [3]). Deri var noga bestämdt antalet både af måltider och af "diskamåth" för hvarje särskilt slag af gästabud, hvarvid dock Fogde och Råd egde makt att i någon mån dispensera från lagens stränghet. I öfverensstämmelse med tidens anda fortgingo de styrande i samma riktning, ehuru man hos oss ej finner någon långt drifven luxus-reglementering hvarken från kommunalmyndigheternas eller Konungamaktens sida, förr än under Johan III, hvilken konung utfärdade flera både allmänna och enskilta stadgar till afstyrande af öfverdrifter i mat och kläder, i synnerhet för Stockholm [4]), till dess kring medlet af 1600-talet landet öfversvämmades af en stor mängd vidlyftiga och pedantiska förordningar i samma syfte. För sedlighetens vidmakthållande egde ock Rådet enligt St.L. makt att brännmärka med vissa yttre tecken i klädedrägt [5]) o. a. d. eller förvisa från staden vanryktade personer [6], samt enligt praxis i vissa

---

1) Ett annat vanligt missbruk af Adel och Kon:s tjenare, der icke Rådets myndighet förslog, utan Kon:s skydd vanligen måste anlitas, var att tvinga byamännen till utborgande af varor och sedan undandraga betalningen. Så klaga Norrköpings borgare 1595, att, då de neka dem kredit eller kräfva för borgadt gods "varda de med sträng bestraffelse afspisade och i deras egna hus samt köpestugor på förskranket med käppar samt snidare-piskor på undertröjan ganska okristeligen slagne och marterade." Sådant förbjudes strängeligen i Stockholms Priv. af 1570 § 19, Linköpings af 1571: ("ingen må med snurckan och pockan, hot eller undsägan truga sig till varor"). Jfr Norrköpings Priv. af 1572 § 10, af 1609 § 11 (sådant skall straffas såsom våldsverk).

2) GiftB. VII.

3) Derpå häntyder åtminstone den föreskriften, att gästabudsvärden skulle efteråt på Rådstugan inför Fogde och Borgm. svära, att han iakttagit stadgan, hvilket var bruket i Lübeck, Hamburg, Wismar m. fl. Frensdorff s. 152.

4) Se Kbr. till Sthm af 1589 om klädedrägt och gästabud; af 1585 om qvinnfolks klädedrägt och brudars utpyntande, se Stiernman a. st. ss. 337, 354.

5) T. ex. förbjuda qvinnor att bära skarlakansmantel eller guld och bräm på kläderna o. s. v. Sthms Tänkeböcker.

6) GiftB. X, Dobbl. B.-Rådet brukade sedermera närmare qvalificera denna förvisning: på vissa mils afstånd från staden, vid hals till görandes eller vid hudens mistning, om han återkommer o. s. v. (Stockholms Tänkeböcker).

fall att anställa undersökningar om den allmänna sedlighetens tillstånd [1]).

Äfven till *familjen* och dithörande förhållanden sträckte sig Rådets kontrollerande myndighet. Så skulle t. ex. Rådet förordna 6 gode män vid arfskifte, till hvilka i fall af behof kunde adjungeras 2 Rådmän [2]). Vidare skulle Borgmästarne med Fogden utreda skyldskaper i tvistiga fall, äfvensom vaka öfver omyndigas rätt och, i fall fränder saknades, förordna två (eller flere) byamän att sköta förmynderskapet, hvilka årligen för Rådet skulle aflägga redogörelse för sin förvaltning [3]). I sammanhang härmed nämna vi, att med tiden äfven fattigvården, hospitaler ("sjukestugor") och välgörande inrättningar ställdes under Rådets förvaltning och uppsigt [4]), hvari detsamma på somliga ställen biträddes af särskilta embetsmän, som kallades de fattiges Förmyndare.

En högst besvärlig och vidtomfattande afdelning af Rådets verksamhetskrets var den *finansiella*, hvilken naturligtvis växte allt mer vid den stigande utvecklingen och synes hafva förorsakat de största svårigheterna, de flesta förvecklingarne såväl i förhållande till kommunens medlemmar som till Regeringen. Enligt St.L. skulle stadens särskilte uppbördsmän (deribland äfven Rådmän) hvarje år, åtta dagar före Valborgsmessan, göra Fogde och Borgmästare räkenskap, sedan de upptagit stadens "ingälder" [5]). Enligt senare förordningar för Stockholm (1598, 1608) skulle äfven Borgmästarne deltaga i den första uppbörden [6]). Derpå synes Rådet, förmodligen vid Valborgsmessan, hafva gifvit menigheten en öfversigt af den finansiella ställningen, ehuru detta ej torde varit dess skyldighet [7]). Räkningarne skulle föras af

1) Så anbefalldes stundom Kämnärerna, feminas per urbem mulgere, ut deprehenderetur si qva peccasset. Detta bruk har fortfarit i Stockholm ännu vid medlet af 1500-talet och i landsortsstäder ända in på 1700-talet. (Se t. ex. Stockholms, Köpings Tänkeböcker).

2) Erfd.B. X.

3) Gift.B. XV.

4) Se t. ex. Kbr. till Wadstena 1532 (Stiernman a. st. I, s. 30), Ordin. för Sthm 1557 § 15, Kbr. till Arboga af 1545 (Lohman a. st. s. 111).

5) KgB. XVIII.

6) RRegistr. Jmfr ang. stadens uppbördsmän längre fram.

7) I ett bref af 1425 till Kon. från menigheten i Åbo heter det: "beträffande böckerna och räkenskapen, så hafver menheten dess aldrig varit begärande af Rådet, utan Rådet hafver oss budit räkenskap hvart år." Grönblad l. c. s. 42. Längre fram anbefalltes Rådet att för vissa inkomster redovisa inför menigheten: se 1600 års Tullordning.

Stadsskrifvaren [1]), ehuru detta åliggande under 1500-talet flerstädes öfvergick till andra; utgifterna synas under äldre tider uteslutande hafva bestämts af Rådet och förnämligast Borgmästarne [2]), ehuru St.L. derom ej säger mer, än att det skulle ske på två vissa tider om året, samt att Rådet egde bestämma lönen för vissa underordnade tjenstemän. Denna St.L:s obestämdhet rörande en så vigtig punkt och Rådets uteslutande befattning med "fateburen", hafva i det följande förorsakat åtskilliga ledsamma uppträden och förvecklingar, splittringar mellan kommunen och hans styresmän, anklagelser mot dessa och regeringens inblandning [3]). Också synes Rådet i följd af bristen på redovisningsbestämmelser och på kontroll från kommunens sida flerstädes hafva oförsvarligt förvaltat stadens medel. I följd af regeringens ingripande erhöllo i några städer Konungens Befallningsmän en viss kontroll äfven öfver uppbörd och utgift [4]); någongång har redovisningen äfven för stadens enskilta inkomster blifvit öfverflyttad till Konungens Räkningekammare [5]).

Utom kassan stodo äfven andra stadens gemensamma tillhörigheter och offentliga handlingar under Rådets vård; dit räknas af St.L. först och främst: "Stadsens Insigle, Book eller Privilegia", hvilka voro särskilt anförtrodde åt de båda sittande Borgmästarne [6]). *Sigill* befinnas några städer hafva egt redan i slutet af 1200-talet och början af 1300 [7]). Längre fram meddelades vanligen i sjelfva Privil.brefven dylika insegel. Stadens *märke* (föreskrifvet af St.L.) [8]) var sannolikt ett aftryck af inseglet [9]). Med *Stadens bok*, som på flere ställen i

1) KgB. XVIII.

2) I Stockholms anf. skatteregister heter det esomoftast: Borgmästaren N. N. annammade af fateburen i gode mäns närvaro så och så stor penningesumma, som han utgifvit till följande o. s. v.

3) Ex. från Jönköping af 1377, (Handl. Skand. Hist. XXXII s. 374), från Upsala af 1583 (Upsala priv. bok): ingen redovisning gjord på 15 år o. s. v.

4) I 1557 års Ordin. § 14 stadgades för Stockholm, att all utgift skulle ske med samtycke af Kon:s Befallningsmän, hvilket ytterligare påbjöds 1598, 1602 och 1608 RRegistr.

5) Ses af Kbr. till Upsala Befallningsman 1583 (stadens Priv.bok).

6) KgB. III. Äfven dessa förvarades i fataburen, hvilken stundom reviderades af utsedde personer (Palmsch. Top. VI). — Enl. Kalmar Priv. $^{1}/_{3}$ 1598 skulle stadens "signet" förvaras af 1 Borgm., 1 Rådm. o. 2 af menigheten med hvar sin nyckel.

7) Ex. anföras af Reuterdahl Sv. kyrk. hist. II, 1, s. 295.

8) KgB. XVI §. 1. Äfven kalladt bytecken (i Sthm 1457: Palmsch.).

9) Somliga städer t. ex. Sthm hafva begagnat flera olika sigiller för olika ändamål. Stockholms äldsta och största kallades för "klämman." Elers a. st. s. 233.

St.L. omtalas, menas än stadens lagbok, än Tänkeboken eller Protokollen [1]). *Lagboken* skulle af Rådet skyddas för obehöriga tillägg eller förfalskningar [2]): att detta åliggande ofta blifvit försummadt, finner man dels af exempel på orätta lagböckers begagnande [3]), dels af klagomålen i Gustaf Adolfs konfirmation 1618. — I *Protokollsboken* skulle enligt St.L. inskrifvas alla, som vunno burskap äfvensom fastighetsförvärf der *kunde* införas. Omkring 1380 förekommer först en stadstänkebok (i Kalmar); i början af 1400-talet omtalas "Stadsboken" i Stockholm och af inledningen till denna stads äldste förvarade protokoll af 1420 får man veta, att deri skulle efter Rådets samtycke uppskrifvas alla gårdar och tomter, som köptes, skiftades, ärfdes eller pantsattes samt andra ärender "som evärdeliga skulle blifva" [4]). Ingenting annat skulle i stadsboken inskrifvas, än det som anbefalldes af Borgmästare och Råd [5]). Att under äldre tider alla städer varit försedda med Tänkeböcker (såsom de från 1400-talet vanligen kallas och intill medlet af 1600-talet), är icke sannolikt: de äldsta ännu bevarade äro från Kalmar (1381, 1384, 1402—1490) [6]), Stockholm

1) I förra meningen KgB. III, XV § 8; Rådst.B. VI — i den senare KgB. XV § 3, JordaB. VI. — I KgB. XV, 3 fattar Arnell boken liktydigt med "Borgerskapsmatriculen": en särskilt sådan fanns dock icke i äldre tider.

2) Förmodligen till kontrollerande häraf samt af lagens rätta tillämpning skulle lagboken årligen på bestämd tid uppläsas (KgB. XXIII). Detta kom dock sedan ur bruk: i dess ställe brukades i somliga städer (t. ex. Gefle) att uppläsa ett extract af lagen. Gefle Domb. i Sv. Hofr. Ark.

3) En Rådman i Jönköping dömdes 1377 att mista hud och båda öronen, emedan han begagnat en lagbok mot Rådets vilja och dermed gjort dem skada. Handl. Skand. Hist. XXXII, s. 373.

4) Rådet "stadhgadhe thessa hær book fore ena stadzbook aff thy at the førræ stadz bokin forfoors ok upbran, swa at i hænne skal scrifvas ept forde Borgm. ok Radhmanna samthykkio alla gardatompter ok hus som hvar af androm faar antiggia mz køp ellr skipte ellr androm giælgulne wardhe ellr giffne ellr i arff kunno falla hulkoledhis thet hænda kan the fridz skillinger aa giffs ok al annor ærande ok maal som awærdhelikom skulle bliwa ok wara."

5) Beslut af Sthms Råd 1474 (Palmsch.).

6) Förvarade å Upsala Univ. Biblioth. De innehålla några få anteckningar för åren 1381 och 1384 skrifna på Platt-tyska, äro från 1402 sammanhängande och intill 1421 skrifna på Latin, derefter intill 1490 på Svenska. De innehålla blott uppbud, köp, skiften, pantsättningar: någon enda gång förekomma tvistemål rörande dylika frågor, aldrig brottmål. En lista är bifogad på dem "qvi sunt cives effecti." De börjas med öfverskriften: Dit is des stades Kalmeren Denkebook. Vi anföra några utdrag såsom exempel på form och innehåll — 1381: Witlik sey dat N. N. heff fastfaren wnd wpghelaten N. N. eyne hoff dye beleghen is wpp de smedestraten to besittende alz des stades recht wt wiset, den voreschr. hof kofte N. N. vor LXXX mr

(från 1420) [1]), Norrköping (början af 1400-talet), Arboga och Jönköping från 1452 och 1456. Utom ofvannämnde ärender började äfven på somliga ställen, (t. ex. Stockholm, Jönköping), rättegångssaker i tänkeboken införas, hvilket från 1500-talet öfverallt blef fallet. Alla stadens angelägenheter såväl de administrativa som de judiciella, ja till och med privata eller historiska anteckningar, sammanfördes sedan deri och det är först efter 1615, från hvilken tid domböckerna skulle till Hofrätten årligen inskickas, som man på några ställen finner rättegångssaker skilda från de öfriga ärenderna.

Sådana voro i korthet grunddragen af den administration och politi, som under 1400- och 1500-talen gjorde sig gällande i de Svenska städerna. Huru de administrativa funktionerna inom Rådet voro fördelade, om de tillhörde alla dess medlemmar eller blott en afdelning deraf, är en ganska svårlöst fråga. Då St.L. häri icke gifver någon ledning, måste vi rådfråga analogier samt enskilta städers handlingar. I Lübeck deltog det gamla Rådet med det nya (båda utgörande "dhe gemene l. ganceme rat") i all lagstiftning, i utfärdande af förordningar och privilegier, i dispositioner af stadens egendom samt andra vigtiga ärender [2]). Likaledes i Wisby skulle hela Rådet höras i några vigtigare mål, särskilt nämnes i lagen nya rättsbestämmelsers utfärdande [3]). Något dylikt har säkerligen egt rum i våra städer: i allmänhet kan man antaga, att alla hithörande frågor, som af St.L. lemnats oafgjorda, i praxis bestämdes efter Tyska sedvänjor. Härtill kommer, hvad som till stöd härför kan hämtas ur enskilta städers urkunder. Att till en början samtliga Rådet deltagit i alla rent politiska förhandlingar, som under äldre tider någongång förekommit, ser man af flera exempel [4]). I Stockholm hör man ofta talas om "allt menige Rådet", "mene Rådet", "ganske menige Rådet" o. s. v., hvilket deltagit i sådane angelägenheter, som t. ex. stadfästande af embetsskrån [5]), granskning af uppbörden [6]), utfärdande af en och annan

---

lubisch. — 1402: Noverint omnes, qvod die N. N. civis N. N. in consistorio coram advocato et consulibus publice constitutus impignoravit fundum suum etc.

1) Förvarade å Kongl. Bibliotheket i Stockholm.

2) Se Frensdorff s. 119, 120; Hach das alte Lübische Recht s. 371.

3) Wisby St.L. I, I, § 9. Jfr Schlyters Gloss. voc old.

4) Se t. ex. anf. br. från Kalmar af 1389, Stockholms Tänkeböcker m. fl.

5) 4 Borgm. med allt Rådets fullbordan och samtycke 1479 och 1501. Klemming a. st. s. 61, 116, jmfr s. 77, 211 m. fl.

6) Stockholms Skatteregister (Ekdahl a. st. s. 1380, 1424 m. fl.).

stadga [1]) eller afgörande af något annat vigtigare mål [2]). Äfven i ransakningar finner man det gamla Rådet hafva deltagit och afgifvit yttranden [3]). Mellertid hafva ofvannämnda ärender ofta blifvit afgjorda *blott* af det sittande Rådet: någon bestämd grundsats har således i detta fall icke herrskat, utan omständigheterna fått bestämma den ena eller andra proceduren.

Till administrationens och politiens fullständiga handhafvande erfordras en ganska vidsträckt myndighet. Deri ingår först och främst en viss *lagstiftningsmakt* inom ifrågavarande område, rätt att utfärda förordningar och polisstadgar. Derutöfver har väl icke, med få undantag, i våra städer Rådets lagstiftning sträckt sig. Äfven i Hansestäderna var denna sida från början den enda, men med det växande oberoendet af hvarje öfverordnad myndighet utvidgade sig området för Rådets lagstiftningsmakt och blef slutligen i formell mening oinskränkt. Så innehålla de Lübska Statutsamlingarne en fortgående utbildning af rättens samtliga afdelningar [4]). Äfven i Wisby-Lagen, ehuru denna stad vid lagens utfärdande var med starka band fästad vid konungamakten, tillägges Rådet rättigheten att för mål, som ej äro i lagen upptagna, omedelbarligen inskrifva i lagboken de nya bestämmelser, som Rådet in pleno beslutat [5]). Huru långt det Svenska Stadsrådets lagstiftning i sjelfva verket sträckt sig, är svårt att afgöra. St.L. innehåller härom blott följande ord i KgB. VII: "Tho skulu the pröfwa ok rådha all mål, förr än the nokon stadga ther å göra." Sedermera tillägges härom i Stockholms Priv. 1436, att Rådets påbud skall varda hållet stadigt och fast [6]), samt i Kbr. till Stockholms Råd 16/2 1578, att Rådet med Befalln.männens tillhjelp har makt "att ordna och stadga hvad som kan vara staden uti en god ordning" [7]). Dessa obestämda stadganden hade kunnat medgifva en ganska vidsträckt lagstiftning, om städerna i allmänhet befunnit sig på en högre ståndpunkt, om bildningsgraden hos stadsstyrelsen varit större och lagskipningen mer regelbunden och ordnad, så att en säkrare praxis kunnat upp-

1) Se t. ex. Palmsch. Top. VI i slutet.

2) I Olai Petri Tänkebok f. 1529 heter det på ett ställe: "Efter vår nåd. herres bef. såto 7 gode herrar af R. Råd för rätta med *ganska menige Rådet* till att uträtta några saker som voro skjutna inför R. Råd."

3) Olai Petri T. B. på flera ställen.

4) Frensdorff s. 126, 164.

5) Wisby St.L. s. I, 1, § 8.

6) "Det de skäligen bjuda" tillfogas i 1529 års Priv.

7) Nordinska Saml. Hist. Urb. Sv.

komma. Sannolikt har man hos oss inskränkt sig till en och annan förordning i processen samt för öfrigt ekonomi- och politi-bestämmelser. Till det senare slaget höra skråförfattningar, byggnadsordningar [1]) samt de flesta stadganden i de så kallade *Burspråken*.

Dessa voro af Tyskt ursprung (Burspraken) och uppkommo i de flesta Hansestäder kring medlet af 1300-talet. Som sjelfva namnet antyder, voro de egentligen sammankomster mellan borgarne angående kommunalärender [2]), sedermera öfverflyttades benämningen på de vid sådana tillfällen öfverenskomna stadgar, som sedvanligen af Rådet pålystes å bestämda tider af året. Af dessa stadgar voro en stor del permanenta, nemligen de vigtigaste, som borde inpräglas i minnet och derföre återkommo vid hvarje burspråk, hvartill lades de för hvarje särskilt tillfälle af behofvet påkallade. När dessa burspråk först brukades i Svenska städer, kunna vi ej uppgifva, ej heller hafva vi funnit spår af namnet för någon annan stad än Stockholm. Der omtalas burspråk från medlet af 1400-talet: från en liten utbyggnad [3]) på gamla Rådstugan (vid Stortorget) plägade Rådet [4]) tilltala den på torget församlade menigheten och afkunna påbud eller som det hette "lysa burspråk." Detta skedde väl vanligen vid Valborgsmässan. Ett ännu bibehållet burspråk af $^{30}/_{4}$ 1575, som äfven blifvit af Konungen bekräftadt [5]), innehåller en mängd korta rättssatser och påbud rörande handel och näringar, ordning och politi m. m., sammandragne, som det säges, ur lagen och Stockholms gamle statuter. Namnet för-

1) Som redan är nämndt, började kring medlet af 1500-talet sådana utfärdas af Konungen, isynnerhet för Stockholm. Enl. Christian II:s Ordinans af 1522 skulle i de Danska städerna Rådet med Konungens Skultus ega att utfärda nya Statuter, som dock blott för ett år gällde utan K. M:s stadfästelse: Colling de jure Sculteti p. 14.

2) Kallades på Latin civiloquia. Strinnholm härleder ordet oriktigt af Baursprache (Sammandrag af Sv. Hist. II. s. 782), förmodl. med afseende på den utsträckning, ordet sedermera fick hos oss, i det med burspråk menades de allmänna vid marknadstillfällen o. s. v. förekommande rådplägningarne. I denna betydelse tages ordet t. ex. i Telge stadga af 1491, der sådane burspråk förbjudas. Hadorph Gambla Stadg. s. 68. Jfr dens. Bih. till R. Krön. s. 371.

3) Som deraf fick namnet burspråket: Elers l. c. I. s. 88.

4) Äfven Regenterna brukade utlysa och hålla dylika burspråk, isynnerhet Sturarne.

5) Se Palmsch. Top. XV: Extract af några förnämlige puncter i lagen och Sthms stads gamle statuter, hvilke i förtiden årligen plägade på Burspråket blifva afläsna, dem man aktar allom till rättelse uppslå i tolboden eller vågen, af K. Johan samtyckte och confirmerade $^{30}/_{4}$ 1575. De börjas med följ. ord: "I Stockholms stad efter gamblum stadga lyses här burspråk."

svann snart derefter, men saken qvarstod under annan form, i det att Rådet emellanåt "på allmänna Rådstugor "föreställde menigheten några puncter till efterlefnad, af ungefär samma innehåll, som de förra Burspråken [1]). Detta var äfven i andra städer brukligt, ehuru dylika stadgar der plägade framställas mer som förslag än som påbud. — Till administrationen hör vidare rättigheten att för nödvändiga kommunalbehof pålägga stadens medlemmar vissa *skatter*, dock under kontroll och med mycken inskränkning [2]). Slutligen förenar sig dermed äfven en *administrativ justis* till upprätthållande af hithörande lagstadgandens kraft och åtlydnad. Detta var i de Nordtyska städerna utgångspunkten för Rådets jurisdiktion, hvarigenom det småningom inkräktade allt mer och mer på Fogdens rättsskipning.

Äfven hos oss var väl denna på många ställen den enda Domaremakt som utöfvades af Rådet, innan St.L. utfärdades och medan det gamla Svenska rättegångssättet ännu fortfor att gälla. Hon bildar derföre en passande öfvergång till

bb) *Rådets lagskipande myndighet.*

Liksom i Lübeck och andra Nordtyska städer Rådets jurisdiktion utvecklade sig bredvid den egentliga och ursprungliga domstolen eller Fogdens och slutligen stod såsom en öfverordnad i förhållande till den senare, så har äfven i Svenska städerna en ursprunglig rättsinstitution småningom fått vika för det efter främmande mönster uppträdande Rådet. Men då i Lübeck Fogderätten äfven framgent qvarstod såsom den ordinarie domstolen och Rådet endast tillegnade sig uppsigt deröfver samt vad derifrån, äfvensom uteslutande jurisdiktion öfver alla mål, för hvilka det sjelft stiftat lag [3]), så försvann deremot i de Svenska städerna den forna nämndedomstolen och uppgick i den nya. Dock icke utan att lemna några spår efter sig. Liksom domstolsnämnden sannolikt uppkommit ur edgärdsmannanämnden genom en potentiering deraf, så qvarstod efter den förras bortfallande i städerna den senare [4]) i full kraft såsom det Svenska elementet i rättsväsendet. Så finnas i St.L. både Tre-, Sex- och Tolfmannanämnder [5]) föreskrifne, de förra blott i några mindre brottmål, såsom dobbel, olofligt tal om Fogden

1) Sthms Tänkeböcker från 1600-talet.

2) Denna rättighet har oss veterligt ej blifvit uttryckligen tillerkänd Rådet förr än uti Gustaf Adolfs privill. af 1620.

3) Frensdorff a. st. 124 ff., 168 ff. m. fl.

4) Förekommer under flera namn, edgärds- och laggärdsmän, värjes- eller värningsmän.

5) KgB. XII, XIV; Dobbl. B.

eller Rådet, olofligt procurerande m. m., den senare i svårare brottmål och lifssaker [1]), efter olika grader. Oftast förekommer Tolfmannanämnd för dulsmål [2]), någongång för nämndamål [3]), mycket sällan skulle hon utses af Fogden och Rådet [4]). I St.L. saknas icke uttryck, som ställa Rådmännen i analogi med Nämndemännen: så talas i RådstB. III om "Borgmästarne, som domen dömde, och Rådmännen, som närvoro, då domen dömdes" [5]). På sådana enstaka uttryck får man dock icke lägga mycken vigt.

Rådsdomstolen bestod enligt St.L. af Fogden [6]) eller hans ombud och de det året sittande Borgmästare och Rådmän, ehuru äfven de öfriga der haft säte och stämma, då de infunnit sig [7]). För öfrigt finner man i städerna och isynnerhet Stockholm tillfälligtvis äfven andra organisationer af domstolen, uppkomna genom godtyckligt adjungerande af utomordentliga medlemmar: så i Stockholm 1525 en blandad rätt af 15 frälsemän med Fogde samt Råd, att döma en förrädare, och sedermera framgent under hela 1500-talet äro Stockholms Tänkeböcker uppfyllda af exempel på olika sammansättningar. Än hafva ett större eller mindre antal Riks-Råd deltagit i angelägna rättegångsmål, än några af dem, som sutto i Slottslofven [8]). Till förekommande af missbruk i detta afseende anbefallde sedermera Rättegångsordinantien af 1614, att alla, som deltogo i rätten, skulle aflägga domareed [9]).

Rättens ordinarie ledamöter, som "sutto för råd och rätta", eller "hade sitt sittande det året" [10]), voro förpligtade att infinna sig på gifvet tecken å Rådstugan tre dagar i veckan [11]) och dessutom så ofta

---

1) I Tänkeböckerna heter det vid dylika tillfällen, att der "sattes en Tolfmannanämnd oppå bänkia": Jönköpings T.B.

2) Se Registret i 1660 års uppl. af LandsL. på Tolfmannaed.

3) E.Ö.B. XI, HgmlB. X, XI.

4) HgmlB. I, jmfr XI.

5) Jmfr KgB. XIII, § 1: "Borgm., som det året sitta och döma, och Rådmän, som med dem sitta."

6) Fogden synes i vissa mål (ss. landsköp o. a. d.) hafva i några städer ensam skipat rätt: så i Stockholm å Fogdestugan (Palmsch. VII). Enligt Åbo Priv. 1525 skulle byamän i dylika mål instämmas för Fogden *eller* Borgmästarne (Stiernman a. st. I, s. 12).

7) I RådstB. II heter det blott: *"särlika* the B. ok R. thet året sitia" etc. Man finner till och med någongång, att en af de forne Borgm. fört ordet i rätten.

8) Ex. samlade ur T.B. hos Palmsch. Top. VII.

9) § 6. — Schmedeman Justitiæverk s. 135.

10) Kallas äfven stolebröder, Assessores o. s. v. Sthms, Upsala T.B.

11) I Sthm gällde af gammalt den seden, att, då en Rådman uteblef på bestämd

Fogde och Borgmästare kallade [1]). Detta påbud upprepades sedermera flera gånger [2]), och böterna höjdes betydligt i 1614 års Rättegångs-Ordin. [3]). Vare sig att orsaken var försumlighet eller brist på mål, säkert är, att i många städer, äfven betydligare, ännu under Gustaf Adolfs regering blott höllos 3 à 4 Rådstugudagar om året [4]), och längre fram finner man vissa år i några af de minsta städerna blott *en* session [5]). I Rätten fördes ordet af Borgmästarne [6]) eller i deras frånvaro turvis af Rådmännen, och hela Rådet deltog efter Tysk sedvänja i domens afkunnande, likaledes Fogden, ehuru som vi förut visat hans ställning i detta afseende började blifva tvetydig mot slutet af perioden Då Gustaf Adolf i 1614 års Rättegångsordning förböd sina Ståthållare och Befallningsmän att "kasta sig upp för domare och confundera sitt och Häradshöfdingarnes embete", så var väl hans åsigt densamma om städernas Befallningsmän, ehuru lagen och traditionen der förorsakade betänkligheter, och då borgerskapet vid 1614 års Riksdag begärde, att Befallningsmännen äfven i städerna skulle förbjudas blanda sig i domares embete, svarade Kon. temligen obestämdt, att de förra "icke skulle befatta sig med Borgm. och Råds embete, hvad deras enskilta rättigheter vidkom" [7]). Obestämda och sväfvande voro ock hans första Ståthållare-instruktioner, der det heter, att Ståth. skola "vara tillstädes på Rådstugan i vigtiga saker", eller "närvara alltid å Rådstugan uti alle domar" o. s. v. [8]).

---

tid, skulle han bestå en kanna Spanskt eller Rhenskt vin på hvar och en af medbröderna. Palmsch.

1) RådstB. II. St.L. omnämner i detta kap. 3 slag af kallelser: 1) Borgm. och Fogde kalla till Rådstugan till biträde i Rätten: böter för uteblifvande tillfalla dels F. och B., dels Kon. och Staden (§ 1). 2) F. o. B. kalla någon att stå till rätta: böter till Kon. och Staden (§ 3). 3) Borgm. kalla till allmän Rådstuga: böter till Rådets ensak (§ 4).

2) Stundom inskränktes dervid antalet af Rådst.dagar till en i hvar vecka: Ordin. för Wiborg § 54 (H. Finl. Hist. I, 318).

3) Se Hert. Carls Patent af 1593 § 2. Rätteg.Ordin. § 3.

4) Så i Westerås under förra delen af G. Ad:s regering; i Hedemora 1615 blott tre mål afdömda: T.B. i Sv. Hofr. Ark.

5) Så i Öregrund och Östhammar 1638, i Trosa 1654. — D:o.

6) Man finner i T.B. icke spår af någon turvexling eller embetsfördelning mellan de sittande B.

7) Se Hallenberg Gust. Adolfs Hist. III, s. 151.

8) Instruct. för Ståth. i Åbo $^{18}/_{8}$ och i Kalmar $^{28}/_{11}$ 1616.

Rådet utgjorde icke någon strängt sluten domstol: i fall af behof kunde Rådmännen ersättas af några tillkallade byamän [1]), ett nytt drag, som påminner om landsrätten. I några städer funnos till och med särskilt valde Rådmans-suppleanter eller s. k. Bisittare, som inträdde vid de ordinarie ledamöternas frånvaro [2]). Ändtligen var det i somliga städer gammal sed, hvilket ock påbjöds vid plikt, att hela borgerskapet skulle infinna sig alla rättegångsdagar å Rådstugan [3]), sannolikt till föga båtnad för rättsskipningen. Något bestämdt antal närvarande ledamöter erfordrades icke för fullsuten rätt: af T.B. befinnes, att stundom blott Borgmästarne med en eller två Rådmän hållit rättegång.

Beträffande omfånget af Rådsdomstolens *befogenhet* egde han att upptaga och afdöma dels i första instansen instämde, dels från underrätten appellerade civil och kriminalmål i de få städer, der sådana underrätter funnos. Vissa högmålsbrott såsom uppror och afvog sköld, voro förbehållna till Konungens nämnd [4]); angående lasteligt tal om Konungen eller hans Råd stod det Rådstufvurätten fritt att afdöma målet eller skjuta det under Konungen [5]). Enligt Johan III:s bref till Sthm $^{18}/_{2}$ 1573 skulle den föreskriften iakttagas med *alla* högmålssaker, att Borgm. och Råd "skulle sig hos K. M. förvetta, förr än de läte domen gå i fullbordan" [6]). Jurisdiktionen utsträcktes i detta fall genom Regeringens befallning 1593, att Borgm. och Råd icke skulle understå sig skjuta några ärender odömda ifrån sig under högre rätt [7]). Undantag förekommo naturligtvis äfven i följd af fora privilegiata [8]).

---

1) Jmfr St.L. RådstB. II, § 1, med Arnells Anm. — Strengnäs Tänkeb. enligt Tollsstorp Beskr. om Södermanland II, s. 80; Enköpings T.B. i Sv. Hofr. Ark.

2) Så i Hernösand och Hudiksvall enl. T.B. i Sv. Hofr. Ark.

3) I några småstäder, såsom Strengnäs, Thorshälla: T.B. i Sv. H. Ark.

4) HögmlB. VI, VII.

5) KgB. VIII.

6) Palmsch. Top. V. Jmfr Carl IX:s Patent om sakören 1609 (Schmedeman a. st. s. 130).

7) Hertig Carls Patent om åtskilliga mål $^{20}/_{8}$ 1593 § 2 (Schmedeman s. 104).

8) Se t. ex. Adel. Priv. af 1569, Rätteg. Ordin. af 1614 § 14, Adel. Priv. af 1617 § 16. — Här torde vara stället att omnämna den jus asyli, som en del kyrkor och kloster i städerna innehade under Katholska tiden och som ofta gaf anledning till tvist med de verldsliga myndigheterna, då dessa stundom måste med våld ur klostren uttaga mandråpare o. a. d. Derföre stadgades i 1436 års Priv., att förrädare och de som med "föracht" (uppsåt) dräpa någon ej skola njuta skydd i kyrkor och kloster. Detta öfverträddes af Gråbrödraklostret 1486, som derföre miste sin asylrätt, men återfick honom 1498 mot afgifvande af en särskilt förbindelse. Sthms. T.B.

Förekom något mål, som i lagen saknade bestämmelser, skulle domstolen enligt St.L. till undvikande af ansvar svära, att det ej fanns skrifvet i deras lag [1]). Enligt senare resolutioner skulle i dylika fall Borgmästare och Råd döma efter deras bästa samvete, hvarvid deras domar skulle "stadige och faste blifva, som annor beskrefven lag" [2]), men Rättegångs-ordinantien af 1614 föreskrifver, att målet då skall uppskjutas och förfrågan göras hos Hof-Rätten. För öfrigt har praxis varit att för i lagen ej uttryckta mål, söka rättelse i Landslagen, Domarereglorna eller Mosis lag. Ett dylikt förfaringssätt blef af Carl IX i hans stadfästelse af Landslagen 1608 påbudet för *landets* domstolar [3]): och ehuru derom ingenting nämnes i Gustaf Adolfs bekräftelse af St.L. 1618, så har detsamma äfven i städerna blifvit sedvänjan [4]).

Proceduren var enligt St.L. ganska enkel. Som vittnen [5]) fingo landtmän icke uppträda, utom i brottmål [6]), ej heller gäster [7]), och ingen fick utföra sin sak genom annor man [8]), undantagande i vissa skuldfordringsmål, der till och med en af rättens egna medlemmar skulle förordnas att procurera [9]). Till sanningens utrönande och tvisters slitande tillsattes ofta af domstolen särskilta nämnder af Rådmän eller andra Byamän [10]). Åklagaremakten var högst obestämd: såsom allmän åklagare uppträder någongång Konungens Befallningsman på stället eller Riksprofossen [11]): vanligen egde dock Kämnärer och Byfogdar att vaka öfver alla förbrytelsers beifrande och bestraffande; den som var i uppenbart rykte för hor eller annan missgerning egde Rådet enligt enskilta privil. [12]) rätt att "förelägga värjesmål." Rådet var för-

1) RådstB. XIII.

2) Stockholms Priv. af 1436 och 1529. D:o af 1563 § 25. Sthms R.hus Ark.

3) Schmedeman a. st. s. 128. Jmfr. Posse Bidr. till Sv. Lagstiftningens Hist. s. 33.

4) Se Tänkeböcker för 1600-talet i Sv. Hofr. Ark. på många ställen.

5) Vittnesmål brukade äfven inhemtas på det sätt, att några af rätten skickades med stadens "secret" till vittnet att fråga detsamma. Stockholms T. B.

6) Rådst.B. XXVI.

7) Jfr längre fram.

8) KgB. XIV.

9) KgB. XI. Jfr härmed Wisby St.L. II, 28.

10) Fyra män till byggn.tvisters slitande, Byggn.B. IX; att besigtiga såramål. Sår. m. w. X; 12-mannanämnd att ransaka om flärd i handel, Kpm.B. III, d:o i egendomstvister enligt många äldre dombref.

11) T. B. i Sv. Hofr. Ark., Sthms RhusArk.

12) T. ex. Sthms Priv. af 1436, 1529, 1563 § 28. Nylödöses Priv. af 1573 § 15. L.L. innehåller stadganden härom i Tingm.B. XIX.

pligtadt att afsäga dom öfver instämdt mål senast på fjerde rättegångsdagen, såvida lagen innehöll någonting derom: domen fälldes vanligen mundtligen, och det var blott i några få bestämda fall, som "stadsbref" skulle utfärdas [1]). Dombref blefvo småningom allmänna och anbefalltes slutligen för alla slags mål genom 1593 års Patent [2]), äfvensom fullständiga domböcker genom Rätteg.ordn. af 1614 öfverallt började hållas.

Såsom egenheter hos äldre tiders rättsskipning i städerna vilja vi anföra några drag. Oregelbundenhet och slapphet är ett gemensamt kännetecken för 1400- och 1500-talens lagskipning såväl i stad som på land, och säkert har det under dessa tider funnits rika anledningar till dylika förebråelser, som 1469 af Carl Knutsson riktades mot Rådet i Upsala, att "fast månge äro, som eder öfverväld och orätt gjort och göra, djerfvens I ej det med rätta att vedergöra" [3]). Under äldre tider har utan tvifvel Adeln af egen maktfullkomlighet fritagit sig från dylika underdomstolar, och längre fram blef han lagligen befriad från de lägre jurisdictionerna. Till och med hos de dömande sjelfve voro rättsbegreppen föga utvecklade och rättsbildningen nästan ingen. Ännu så sent som under Gustaf Adolfs regering (omkr. 1620) klagades, att städernas förmän äro som oftast så olärda, att de hvarken kunna läsa eller skrifva [4]). Man kan då ej undra öfver sådana oformligheter, som man emellanåt finner, t. ex. att de dömde i egen sak [5]), att de lemnade den anklagades lif eller död åt målsegandens godtycke [6]), eller olagligen nedlade mål [7]) o. s. v. Och i stället för att ytterligheterna och missförhållandena i St.L:s straffbestämmelser borde vid stigande bildning hafva blifvit mildrade och afjemnade, fortgick man alltjemnt på samma bana [8]).

1) Ärfd.B. X, XVIII, XX, JordB. VI, Byggn.B. IX, Kpm.B. XXI, Drpml. wil. XI, Rådst.B. XXIX.

2) Schmedeman a. st. s. 104.

3) Kbr. till Upsala stad 1469. Jfr d:o till Arboga 1484.

4) Anf. anonyma Memorial om medlen till städernas upphjelpande i Oxenstj. samlingen å R.Ark.

5) Ex. anf. ur Norrköpings T.B. 1499 af Sundelius a. st. s. 447.

6) En qvinna slapp från dödsstraffet i Sthm 1554, efter "målseganden ej begärde hennes lif." (Palmsch.)

7) Jmfr Sthms Priv. 1529, d:o 1563 § 31.

8) Vi vilja anföra några exempel: Det besynnerliga straffet i St.L. GiftB. X § 2 tillämpades och exeqverades öfverallt, i Stockholm ännu 1626, och särskilta "skand-

Den som icke åtnöjde sig med Rådets dom, hade att välja mellan två utvägar. Antingen kunde han inom 8 dagar med 20 mark vädja under Konungens dom, hvaremot Rådet skulle uppsätta 40 mark [1]). Eller ock kunde han mot 5 öre "bidhia stadhsens book läsa fore sik" [2]), till utrönande af domens rättvisa. Detta egna bruk hade i St.L. inkommit från Lübska rätten [3]) eller Wisby St.L. [4]) och användes väl sällan. Under annan dom än Konungens medgafs icke af St.L. appellation: det var uttryckligen förbjudet att kära öfver samma mål "i androm landom eller köpstadhom" [5]). Det oaktadt finner man exempel på, att Rådhusrättens dom blifvit öfverklagad och stadfästad vid ordin. lagmansting [6]). Eljest skulle klagomålen upptagas och afgöras vid städernas ordinarie 2 gånger om året föreskrifna Räfsteting eller ock vid (tillfälliga) Rättareting. Om de förra stadgar St.L., att en af Kon:s Råd och en af Biskopens Capitulo skulle komma in till staden "twem timum" om året, för att "allum Gästum ok Byamannum" rätt skipa "aff Hoffmannum ok Klärkum ok aff andrum landzmannum, the kunno ey rätt aff få" [7]). Dessa ordalag häntyda på en befarad kollision mellan köpstadsmän och andra samhällsmedlemmar, i fall de senare ej ville underkasta sig stadsrättens forum [8]). Men jemte denna

stenar" eller "skamflaskor" funnos för detta ändamål i hvarje stad. — Se här några prof på sättet för rättvisans skipande i landets förnämsta stadsdomstol. En qvinna som stulit 16 mark af sin husbonde dömdes att sättas qvick i jord (1488, d:o 1489 — en dylik förbryterska fick 1498 nåd "på Drottningens bön"). — För horsbrott dömdes 1490 att göra pilegrimsresa till St. Jakob och rymma riket (för dråp ofta likadana straff). — En ringare dömdes 1504 för försumlighet vid eldsvåda till hjul, men benådades på menighetens bön med svärd. — En ung person, som stulit, benådades 1504 "för sin ungdom och ansigte, att Gud honom väl skapat", "till ett fullt bad vid stupan." — Falske myntare dömdes 1592 att sålunda afrättas, att de falske mynten smältes och gjötos dem i halsen, o. s. v. Sthms Domb. (Utdrag i Nordin. saml.).

1) RådstB. III. Det sistnämnda kom med tiden ur bruk.

2) RådstB. VI.

3) Frensdorff a. st. s. 181.

4) Wisby St.L. I, I, 1, § 7.

5) KgB. X § 1.

6) Se t. ex. Dombref af 1492 i Jönköp. Rh.Ark. (Handl. Skand. Hist. XXXII s. 379). — Tvister mell. Rådet och landtkommuner hafva afgjorts vid lagmansting, så i Upsala 1454 och 1582 (Stadens Priv. bok), mellan Rådet och Stadens menighet af Befallningsmän och Borgmästare i närmaste städer (se t. ex. Westerås och Arboga T.B. i Sv. H. A.).

7) KpmlB. XXX § 2.

8) Om denna domstols likhet med de Tyska Gastgerichte se Nordström Sv. Samh. förf. Hist. II, s. 530.

speciella uppgift hade utan tvifvel denna domstol äfven befogenhet att upptaga alla under Konungsdom lagvadda mål, hvilket bestyrkes af uttryckssättet i 1593 års Patent § 1 [1]. I Stockholm har Konungens dom vanligen utöfvats och afkunnats af flera R.Råd å Stadens Rådstuga [2]; från dem kunde enligt kungörelse dersammastädes 1582 ytterligare appelleras till Konungen sjelf [3].

St.L. föreskrifver utom Rådstufvurätten äfven en lägre domstol "å torgheno uthe", med samma rättegångsdagar, från hvilken med 2 öre vädjades under den högre [4]. Denna domstols beskaffenhet under äldre tider är föga utredd, och få spår förefinnas deraf. Enligt St.L. skulle han bestå af tre ledamöter eller Fogater, som de ock kallades [5], en å Konungens vägnar och två Rådmän å stadens. Om med de senare menas två ordinarie ledamöter af Rådet eller blott kolleger i allmänhet, är ovisst: det senare visar sig dock sannolikast. Rörande domstolens ursprung och äldsta historia kan man blott framställa gissningar: om han icke blifvit upprättad, för att åstadkomma analogi med landsrättens tvenne instanser, så har han väl blifvit hemtad från Lübska eller Wisbyensiska rätten: i den förra är Fogderättens organisation enahanda, men hans ställning och befogenhet högre [6], i den senare var sammansättningen något olika, med jurisdictionen ungefär öfverensstämmande [7]. Det synes sannolikast, att denna underrätt för de flesta städer befunnits öfverflödig tills vidare; man finner blott i Stockholm och några andra städer spår deraf under ifrågavarande tiderymd, och ingenstädes längre tillbaka än från slutet af 1400-talet. Så heter det i Stockholms Tänkeböcker för 1490, att Fogden och Rådet låta sig väl nöja med "all sona och förlikning, som Kämnererna göra med dem, som ej till rätta vele" och gifva dem dervid fullmakt att göra och låta efter behag i vissa smärre mål. Deraf synes som denna ej ansetts för någon egentlig domstol, utan blott för en förlikningsnämnd. I början af 1500-talet nämnes i Tänkeböckerna "Lislerätten" (1517) och längre fram flera gånger "Underrätten." Som en

---

1) Schmedeman a. st. s. 103.

2) Sthms T.B. för 1574.

3) Sthms T.B. för 1582.

4) RådstB. V.

5) Möjl. i analogi med de 2 Fogdarne i Wisby St.L., som tillika voro Underdomare.

6) Frensdorff a. st. s. 173 ff.

7) Wisby St.L. II, 12.

egentlig domstol framträder Kämnersrätten först i Stockholms Privil. af 1529, der det strängeligen anbefalles Kämnererne att redovisa för sakörena, äfven om de "i sina rättegångar" förlikte de tvistande.

Kämnersembetet [1]) var från början och enligt St.L. något helt annat än det sedermera blef. I öfverensstämmelse med Lübska rättens "Kemerere" eller "Camerarii" [2]) skulle i våra städer en "Kämmenär" jemte Stadsskrifvaren (eller två Rådmän) uppbära och redovisa alla stadens ingälder [3]). Liksom i Lübeck blef fallet, förenade sig dermed sannolikt snart en uppsigt öfver hvarjehanda handels och handtverksförhållanden, att ej staden måtte gå miste om sin inkomst deraf, jemte skyldighet att instämma dylika förbrytare för rätta [4]). Af hans befattning med sakörena [5]) följde likaledes snart åliggandet att vaka öfver *alla* förbrytelsers beifrande, hvaraf tillföll staden någon inkomst. Båda synpunkterna framhållas i en skråförfattning för Bardskärare 1571, der det påbjudes, att den som förbinder ett sår skall låta Kämnererne veta det, på det att stadens *rättighet* och *straffet* icke skall vara försummadt [6]). I Stockholms Tänkebok af 1624 yttras, att "Kämnerernes embete har varit att låta citera stridiga parter till rätta, såsom ock för rätten anklaga dem, som med några förgripelser och våldsgerningar beträdas" [7]). Härmed förenade sig lätt och naturligt en lägre rättsskipning, sådan som den af St.L. föreskrifna, med skyldighet att i första hand upptaga och slita smärre tvister eller förlika dem.

Så har säkerligen på de flesta ställen Kämnersrätten uppkommit; på några har väl underrättens platser småningom intagits af Kämnererna, då befattningarne beqvämligen kunnat skötas af samma personer. Den kungliga Fogden i St.L:s underrätt har, der denna ej fanns, blifvit förordnad att uppbära Konungens inkomster, liksom Kämneren

---

1) Stafvas i äldre handlingar på mångfaldiga vis: St.L. har Kämmenära, för öfrigt finner man Kämener, Kämpnär, Ciemnär, Kemner, Chembnär.

2) Frensdorff s. 113. — Camerarii omtalas äfven i Köpenhamns stadsrätt af 1294 cap. X. (Kold. Rosenv. s. 103.)

3) KgB. XVIII.

4) Klemming Skråordn. I, 32: Skomak.Ålderm. skall anmäla för stadens Kemmanerom ang. olaglig skohandel, "att de dem till rätta förhindra efter lagen" (fr. slutet af 1400-talet) jmfr. s. 115. Se äfven Sthms T.B. från slutet af 1400-talet.

5) Jmfr. Sthms Priv. 1563 § 31.

6) Klemming a. st. s. 245.

7) Öfverinseende vid skjutsväsende och inqvartering har äfven tillhört Kämnererne: se Sthms Priv. 1563 § 15, T.B. af 1674. anf. Kbr till Upsala stads Befallningsman 1583.

stadens, och har af samma orsaker, som den senare, fått sin befattning utvidgad till något likartadt med dennes samt på sina ställen deltagit i Underrätten, dock numera såsom en stadens embetsman. I Stockholm skulle vanligen fö ra årets Kämnerer blifva Rettefogdar. Kämnersrätten bestod vid slutet af tiderymden vanligen af två ledamöter, stundom en å Rådets och en å Menighetens vägnar [1], stundom båda Rådmän, i hvilket fall Kämnersembetet gick i tur mellan Rådets ledamöter [2]. I Stockholm voro båda Kämnererna "utom Råds", tills det 1622 förordnades, att Rådmännen skulle hvar sin månad "sitta på Kämnersstugan" Kämnererna till hjelp [3]. Gränserna mellan den högre och den lägre stadsdomstolens befogenhet voro högst obestämda, och någon stadgad praxis kom ej heller till stånd, förr än senare. Man finner såväl att Borgmästarne uppträdt och dömt i Underrätten, som att Kämnererne varit bisittare å Rådstugan. För Kämnersrättens räkning lärer i Söderköping hafva begagnats en egen kortare lagbok [4], förmodligen ett utdrag ur St.L.

cc) *Rådets exekutiva myndighet.*

Denna var enligt St.L. kanske obestämdare än någon annan dess befattning: inga gränser finnas der uppdragna mellan Rådet och Fogden. Domarne exeqverades väl således i de flesta fall gemensamt å bådas vägnar genom deras "svenner." För vissa speciella fall var exekutionen bestämd: så skulle genom två byamän bysättning ske [5], två män skulle med stadens svenner i visst fall skaffa målseganden "fullan pant" [6], och 12 män skulle utmäta böter för bruten konungsdom [7]. För öfrigt fick praxis afgöra saken, och derigenom synes exekutionen allt mer kommit i händerna på Konungens Befallningsmän, hvarföre längre fram (i slutet af 1500-talet) särskilta privilegier tilldelades vissa Magistrater i afseende på domars verkställande. Så meddelades i Johan III:s bref till Stockholm $^{18}/_{2}$ 1573 åt Borgmästare och Råd fullmakt att "fullfölja med exekutioner och straff på alla lagligen afsagda domar, som i staden ske kunna, undantagande högmålssaker" [8].

1) Se t. ex. Graffman de Strengnesia (p. 40), från 1590-talet.

2) Så t. ex. i Upsala (T.B. i Rhs.Ark.).

3) Sthms Embetsbok.

4) Enl. uppgift af Södersten de Sudercopia p. 28 n.

5) RådstB. XVIII.

6) RådstB. VII, § 1.

7) KgB. V, jmfr. äfven GiftmB.

8) Palmsch. Top. V.

Likaledes förekommer i Kbr. af $^{5}/_{3}$ 1589 till samma stad, att, om Ståthållare och Befallningsmän försumligen uppfyllde sin skyldighet att straffa låta alla öfverträdare af stadens privilegier, så egde Borgmästarne fullkomligt tillstånd sådane att fängsla och straffa låta [1]). I 1615 års Rättegångs-Process §§ 37 och 38 uppräknas Borgmästare och Råd bland exeqverande myndigheter utan någon begränsning från Kon:s Befallningsmän. Allt förblef således på gamla foten och i Ståthållare-Instruktionen af 1616 heter det blott i största allmänhet, att Ståthållaren skall hålla hand öfver, att alla domar å Rådstugan måtte hafva sin exekution [2]).

Efter att hafva gifvit en öfversigt af Rådets organisation och vigtigaste funktioner vilja vi tillägga några ord om den *skillnad*, som St.L. uppställt *inom Rådet* mellan Borgmästare och Rådmän och som sedermera blef allt större, sedan Borgmästareplatserna upphört att vara ambulatoriska. I de Nord-Tyska städerna förefanns ursprungligen ingen sådan skillnad, men hade redan utbildat sig, då titeln öfverflyttades till Sverige [3]). Behofvet af en ordförande till ledning af ärenderna i ett mångtaligt kollegium har naturligtvis gifvit upphof åt embetet, som länge icke heller haft någon annan betydelse. Redan St.L tillägger dock, i enlighet med hvad som då egde rum i Lübeck (men icke i Wisby), Borgmästarne vissa högre rättigheter. Dessa bestodo först i högre aflöning och större andel af böter, vidare i högre straffbestämning för deras lastande eller våldförande [4]), liksom äfven de sjelfva i fall af försumlighet voro underkastade större penningstraff [5]). Borgmästarne voro dessutom stadens främste representanter och uppträdde vanligtvis som sådana vid Riksdagar och beskickningar till Konungen. Vidare skulle de utfärda kallelser till rättegång (såväl för bisittare som anklagade) i förening med Fogden, men till Byamoten rörande stadens enskilta angelägenheter ensamma [6]). På Rådstugan skulle de leda förhandlingarne, derefter å rättens vägnar utfärda

1) Palmsch. Top. XIV jfr. ofvan.
2) Saml. af Instruct. s. 99.
3) Frensdorff a. st. s. 109 ff.
4) KgB. XII, XXII.
5) KgB. XIII, RådstB. II, § 2.
6) Jmfr dock ofvan.

besluten [1]) samt slutligen vaka öfver deras verkställande. På denna grundval började Borgmästarne alltmer höja sig öfver kollegernas krets. Rådfrågar man de äldsta Tänkeböckerna, så finner man i början af 1400-talet Borgmästarne knappt omnämnda: under denna tid förekommer t. ex. i Kalmar alldrig annat än advocatus et consules, men kring medlet af århundradet nämnas vanligen Borgmästarne särskilt [2]). I Stockholm utfärdades från slutet af 1400-talet skråförfattningarne af Borgmästarne "med vårt kära Råds råde", äfvensom man något senare finner dem nog egenmäktigt disponera öfver stadens medel. Från slutet af 1500-talet börjar Borgmästareembetet att framträda som en med särskilta rättigheter utrustad embetsmyndighet, öfverordnad Rådet "i gemen." Borgmästarne berättigades att i vissa fall handla på egen hand [3]), och Rådmännen i Stockholm fingo ej lemna staden utan deras tillstånd [4]).

De förmåner, som enligt St.L. tillkommo Borgmästare och Råd för deras tjenster, voro, utom lagens särskilta beskydd, egentligen blott en aflöning af 6 mark för hvar Borgmästare och 4 d:o för hvar Rådman (½ å Konungens och ½ å stadens vägnar) [5]), samt andel i vissa böter. Emellertid ökades småningom dessa inkomster olika i olika städer: man finner att Rådet på somliga ställen småningom kommit i besittning af åtskilliga *stadens* inkomster [6]), hvarjemte Konungen från medlet af 1500-talet började tillägga detsamma hvarjehanda förmåner [7]) och slutligen äfven penningelön. Så anslogs 1599 till lön för Rådet och andra embetsmän i Nylödöse ⅓ af tullen [8]), och då i 1600 års Tullordning sistnämnda belopp tillades alla städer, bestämdes att Borgmästarne i Stockholm skulle deraf åtnjuta 100 Dr och i de öfriga

---

1) Derföre heter det ock i St.L., att Borgm. "sitta och döma", under det Rådmän "med dem sitta" eller "närvara då dom fälles": KgB. XIII, RådstB. III, VI; likaledes att man aflägger sin ed "fore Fogaten ok Borgamestara", hvilka ock förestafva eden: RådstB. XXIX.

2) På Borgarelistorna heter det numera: sub proconsulibus N. N. et N. N.

3) Se t. ex. Kbr. till Stockholm af 8/3 1589, Ordin. af 1557 § 4 m. fl.

4) Priv. af 1594 § 30.

5) KgB. XXII.

6) Se t. ex. Nils Stures bref till Arboga 1480 (Lohman a. st. s. 31), der Rådet försäkrades om sin gamla lön, neml. ½ af sakören jemte inkomst af "pyndara, bastufwo oc boder.

7) Så erhöllo B. o. R. i Sthm 1543 "allt Framköp som faller i staden", samt 1563 förköpsrätt näst Kon. till alla främmande drycker. (Jmfr. Privil. för Nylödöse af 1573 § 13.)

8) RRegistr.

städerna proportionsvis mindre [1]). I Åbo skulle enligt Priv. $^{10}/_{7}$ 1607 § 5 Rådet bekomma hälften af Kronans tomtören, och slutligen erhöllo Borgmästarne i Stockholm 1614 fast lön med 250 Dr. hvardera. Huruvida Rådet i äldre tider varit befriadt från borgerliga utskylder, är svårt att afgöra, ehuruväl det synes följa af lydelsen i ett Kbr. af 1524 [2]); dock skulle enligt resolution å Stockholms stads inlagde punkter 1602 vård och vakt bestridas af dem lika med de andre.

Så ringa och enkla våra äldsta stadsförhållanden än voro, fanns dock naturligtvis en mängd smärre bestyr, hvilka af Rådet ej kunde medhinnas, isynnerhet som dess medlemmar tillika drefvo borgerliga yrken. Dessa bestyr voro derföre fördelade på åtskilliga *lägre Embetsmän*, som voro Rådet underordnade. Enligt St.L. KgB. XVI skulle alla sådana "väljas och lysas" på samma gång som Rådet, hvilket så plägade tillgå, att Rådet först sinsemellan anordnade en ny fördelning af stadens nödvändiga tjenster bland byamännen och sedan vid Walborgsmässan kungjorde densamma och inhemtade vederbörandes samtycke samt mottog deras eder. Detta årliga ombyte af tjenstemän hade också sin förebild i de Lübska förhållandena med den skillnad, att i Lübeck alla dylika tjenster fördelades *inom* Rådet mellan dess egna medlemmar [3]), hvilket deremot i de Svenska städerna mer var ett undantag. Men liksom i Lübeck denna Rådets "umme setten" eller den nya fördelningen af embetena snart blef hufvudsaken vid de högtidliga årliga valakterna, för hvilken den forna motsatsen mellan gamla och nya Rådet trädde i bakgrunden, så blef äfven i våra städer mot slutet af ifrågavarande tiderymd betydelsen af det föreskrifna Walborgsmässo-valet alltmer inskränkt till ett utväljande och kungörande af kommande embetsårs underordnade tjenstemän.

Af dessa synas de som skötte Secreteriats-tjensterna hafva varit permanenta, eller de af St.L. omtalade Tollskrifvaren, Vårdskrifvaren och *Stadsskrifvaren*. Den senare, som var den förnämsta tjenstemannen utom Rådet och någongång benämnes Secretarius och Syndicus [4]), var i äldre tider utan tvifvel af större inflytande; han var oftast den ende, som fått någon lärd bildning [5]); sällan inträffade väl, att han äfven

1) Stiernman Comm. Pol. OEcon. st. I, s. 458.

2) Stiernman a. st. s. 9.

3) Frensdorff a. st. s. 108.

4) Den senare benämningen förekommer t. ex. i Stockholm 1572 (RRegistr.), i Hedemora 1507 (Hülphers Resa i Dalarne s. 524).

5) Han var väl icke så sällan en klerk: så har Olaus Petri 1524—29 tjenstgjort som Stadsskrifvare å Sthms Rådstufva.

egde juridiska studier. Han skulle föra Tänkeboken å Rådstugan, affatta och uppsätta alla offentliga akter och dokumenter, recitera dem, der så behöfdes, samt enligt St.L. föra stadens räkenskaper [1]), hvilket senare dock under 1500-talet flerstädes öfvergick till särskilta embetsmän [2]). Secreterens aflöning har i Stockholm under Olai Petri tid uppgått till omkring 50 mark [3]).

Vårdskrifvarens befattning synes hafva bestått i att föra räkenskap med allt hvad till stadens "vård" och vakthållning hörer. Tjensten kom på de flesta ställen snart ur bruk [4]). *Tollskrifvaren* blef med tiden en konungens embetsman, som af honom ensam tillsattes [5]). För *Kämnerernas* och *Byfogdens* embete ha vi i det föregående haft tillfälle närmare redogöra. I de städer, der uppbördsverket med tiden blef särdeles omfattande, t. ex. Stockholm, befriades Kämnererna från denna befattning, som uppdrogs åt särskilta uppbördsmän. Enl. St.L. skulle skottet uppbäras af särskilta "Skuthmän" [6]). De förekomma i Stockholm i början af 1500-talet under namn af Skottherrar och utgjordes då af 2 Rådmän, 2 borgare samt Stadsskrifvaren [7]), hvilka ock åtnjöto lön för sitt "kemneri." Uppbörden förrättades å stadens "skotthus", och då (som det stundom heter) "skottstuga hölls" [8]), skulle hvar och en infinna sig vid samma vite, som då byamot försummades [9]). Af Gustaf I föreskrefs för Stockholm, att all stadens ränta skulle uppbäras på ofvannämnda sätt [10]), hvarföre man sedermera i stadens Embetsböcker finner namngifna 4 män, "som stadens uppbörd och utgift hafva händer emellan" [11]). I Stockholm och andra sjöstäder såsom Nylödöse m. fl. förekomma dessutom s. k. *Fraktherrar*, hvilka upptogo

1) KgB. XVIII.

2) Ännu enl. 1557 års Ordinantia för Sthm § 14 skulle han deltaga i uppbörden.

3) Ekdahl a. st. s. 1424.

4) I Stockholm finner man dock dens. fortfarande.

5) Denna befattn. blef i några mindre sjöstäder sammanslagen med Stadsskrifvarens.

6) KgB. XX §§ 8, 12.

7) Ekdahl a. st. ss. 1380, 1381, 1412, 1422.

8) Se Widegren ny Beskr. öfver Östergötl. I, s. 224 ang. Wadstena.

9) KgB. XX § 9.

10) Se 1557 års Ordin. § 14.

11) I Stockholm finner man dock i detta fall täta förändringar. Så öfverlemnades uppbörden 1598 åt 2 Borgm., 2 Rådm. och 2 af menigheten, 1608 åt en Fogde, 2 Borgm. och 6 af menigheten, hvilka årligen skulle ombytas. RRegistr.

alla skepps- och hamnumgälder [1]) samt på *Fraktkammaren* anordnade alla skeppsfrakter, äfvensom särskilta deputerade för olika uppbörder.

Andra af St:L. omnämnda embetsmän äro stadens 2 *Märkismän*, som stämplade med stadens märke [2]), 2 *Byggmästare* [3]), 2 *Vårdsättare* [4]), 2 *Rättare till vigt* [5]), 8 *Höfvidsmän* (2 för hvarje fjerding af staden) [6]), hvilka sistnämnda skulle handhafva eldsläckningen, och slutligen ett obestämdt antal *Tavernare* [7]). Härtill kom under tidernas lopp en hel mängd andra tjenstemän, olika till namn och antal i olika städer. De allmännast förekommande bland dessa äro *Qvartermästare* (med tiden föreståndare för borgaremilisen), *Kyrkovärjare*, *Fattigförmyndare*, *Tomtmätare*, *Syllesättare*, (som skulle "märka och besnöra" husens längd och bredd), samt för de större sjöstäderna *Vägare*, *Packare*, *Vin-*, *Öl-* och *Kryddpröfvare*, *Brokikare* m. fl. I Stockholm förordnades genom Statuterna af 1570 särskilta s. k. *Förmyndare* eller *Bisittare för Embetena*, hvilka skulle kontrollera Åldermännen och vaka öfver handtverksskråna: de voro vanligen omkring 12 till antalet [8]). Äfven af Regeringen anbefalldes stundom vissa embetsmän, för tillfälliga ändamål: så skulle enligt 1546 års Mandat i städerna tillsättas "några gode och förståndige män att hafva akt på köpmanshandeln" med ansvarsskyldighet inför Konungen o. s. v." [9]).

2. *Stadens Menighet.*

Vi hafva i det föregående fästat uppmärksamheten på den stora skiljaktighet, som förefinnes mellan de Svenska och de Tyska städerna i anseende till uppkomstsättet. Dettas beskaffenhet hade till följd, att innevånarne i de Tyska städerna till en början utgjorde en blandning af de mest olikartade beståndsdelar, under det de Svenska städerna ursprungligen beboddes af en väsendtligen homogen befolkning. Under

---

1) Se Priv. för Sthm af 1529, Sthms Emb.-böck., Priv. f. Nylödöse 1573 § 4.

2) KgB. XVI § 1.

3) KgB. XVI § 3. ByggnB. I.

4) Kallas i T.B. Vållcskådare.

5) KgB. XVI § 3.

6) ByggnB. XXII § 5. Dessa kallades sedermera Brandmästare.

7) KgB. XIII.

8) Stockholms Emb.böcker, jmfr s. 160. I Sthm förekomma dessutom Byggningsskrifvare, Strömskrifvare, Bomläsare, Malmfogdar, Saltmätare, Ved- och Tjäruvräkare m. fl.

9) Se Stiernman I, s. 84.

bådas utveckling framträdde nya olikheter. De Tyska städerna utbildade sig i motsats och strid mot andra samhällskrafter och blefvo derföre nödsakade att jemte ständigt öppnadt tillträde för enskilta nya medlemmar strängt isolera sig från nyssnämnda krafter såsom helheter betraktade. Sådane voro den öfverherrliga myndigheten, adeln och presterna. Huru de Tyska städerna befriade sig från den förstnämndas direkta inflytande, hafva vi nämnt; äfven mot de senare intogo de en strängt sluten hållning och sträfvade att bibehålla stadsväsendet rent och oblandadt af främmande tillsatser. Så hafva de Lübska och Hamburgska rätterna uppställt följande energiska rättssats: ingen riddare skall bo inom stadens weichbild [1]). Likaledes funnos garantier mot presterskapets intrång. De Svenska städerna hade deremot uppvuxit ur fredliga förhållanden under Konungamaktens hägn och ur landsrättens sköte; ehuru det borgerliga elementet af naturliga skäl der herrskade så godt som uteslutande, fanns dock till en början för dem intet skäl att omgifva sig med stränga skrankor och skarpt begränsa sig mot de andra klasserna, hvarföre äfven dessa snart i skydd af sina privilegier började inflytta och njuta af borgarnes förmåner utan att underkasta sig deras skyldigheter. Häraf uppväxte en långvarig strid mellan de olika elementerna i städerna, ur hvilken det borgerliga slutligen framgick segrande. — Således finna vi i Tyskland de mest olikartade elementer för sitt rättsskydd sammanslutna till en strängt begränsad kommunalenhet, i Sverige en likformig befolkning förenad på samma lokal för vissa gemensamma ändamål, i början utan behof af exklusiva rättigheter och derföre öppen för främmande elementers inblandning.

Förhållandet ändrades snart för de Svenska städerna med adliga Frälsets inrättande. Redan Torkel Knutsson synes efter de Nordtyska städernas förebild hafva förbjudit allt frälse i städerna [2]), men detta har visserligen icke blifvit efterlefdt, och Frälset gick par la force des choses omotståndligt framåt. År 1335 hör man från Upsala, att adel och och prester på sina köpta gårdar fritogo hvarjehanda näringsidkare från stadens kronoutskylder. Detta förbjudes, och det förklaras, att alla stadsinnevånare, *såvidt* de idkade handel med de öfriga byamännen, skulle deltaga i nämnda skatter [3]). Häraf finner man, att de näringsidkande i några städer redan såsom de egentliga byamännen begynt skilja sig från alla som icke drefvo borgerliga yrken. Frälsets

1) Frensdorff a. st. s. 191, Hegel a. st. II, s. 451.

2) Enl. ett gammalt register å Sthms Rhs,Ark.

3) Dipl. Sv. 3126. Jmfr för:fs Bidr. till Sv. städ:s etc. s. 23.

skattefrihet synes dock, att döma af enskilta bref, ej hafva varit utsträckt äfven till kommunal-utskylder, t. ex. skottet [1]), hvilket i början af 1300-talet började från Tyskland öfverflyttas på våra städer [2]). Detta är noga att märka, ty det fasthölls länge såsom en grundsats inom hithörande beskattningsförhållanden.

Vi hafva på ett annat ställe [3]) sökt närmare redogöra för St.L:s bestämmelser angående burskaps [4]) vinnande och hafva blott några få anmärkningar att tillägga. Städernas innevånare voro enligt St.L. af två hufvudklasser: byamän och gäster [5]). De senare eller alla främmande näringsidkare voro i sina rättsförhållanden underkastade flera inskränkningar: så voro de ställde i ett visst klientelt förhållande till de borgare, hos hvilka de bodde, vidare fingo de hos oss, liksom i Lübeck, blott i vissa brottmål uppträda som vittnen [6]) o. s. v., oaktadt de i motsats till förhållandet i Lübeck för sitt gods voro underkastade kommunalafgifter (skottet) [7]). Byamännen i ordets vidsträcktare betydelse synas efter St.L. kunna fördelas i flera klasser, ehuru de icke uttryckligen der framstå såsom sådane. Den högsta klassen, innefattande de egentliga, sjelfständiga byamännen, utgjordes dels af sådane näringsidkare, som vunnit burskap efter alla i St.L. KgB. XV in pr. föreskrifna villkor, dels af dem, som genom arf, köp eller gifte blifvit innehafvare af någon stadens fastighet och såsom sådane ansågos fria från burskapsafgiften. Att St.L. i senare händelsen förutsätter ett visst borgerligt yrke såsom dermed förenadt, följer dels af hans allmänna tendens och uttryckssätt, dels af de historiska förutsättningarne för honom och de faktiska förhållandena, enligt hvilka ännu icke funnos några sådana medelklasser, som i en senare tid valt sin bostad i städerna *utan* att idka borgerlig näring. Den andra

---

1) Handl. rör. Skand. Hist. XXXII, s. 373: bref till Jönköping.

2) Någon motsvarig kommunalafgift har väl funnits längre tillbaka, ehuru förmodligen af mer tillfällig natur. Både beskattningssättet och namnet af skott har dock kommit från Tyskland, der det kallades "schot" och på Latin collecta.

3) Se Förf:s Bidrag etc. ss. 26—28.

4) Ordet är af Tyskt ursprung: jus civium quod dicitur burscap, heter det i inledn. till borgarelistan i Bremen 1289, Frensdorff s. 193, n. — Kallades hos oss ofta borgerskap, burgskap.

5) Benämningen *gäst*, som förekommer redan i Bjärköarätten (38 § 3) i motsats till bymaþer, var äfven kommen från Tyskland, se. Frensdorff s. 191.

6) Enl. 1570 års Statuter § 15 skulle vid utlänningars mål till bevisning användas halfparten utlänningar.

7) KgB. XIX.

klassen utgjordes af dem, som egde till 20 mark i "widerläggning" [1]) (bolag); dessa skulle ock erlägga burskapsafgiften, ehuru de ej betraktades som sjelfständiga Byamän, ej heller utgjorde lika skatt med de öfriga [2]). Den tredje klassen innefattade de s. k. 5-öresborgarne eller alla sådane lösa personer, hvilka staden för kontrollens skull affordrade burgäld. Äfven andra utskylder skulle af dessa utkräfvas, dock med mildrande tillägg [3]), och att de i allmänhet dragit sig undan desamma, befinnes af många handlingar. Häraf är temligen klart, att sådana från början måste hafva stått på en lägre linia, jemförde med den första klassen. — Äfven *inom* den senare utbildade sig en viss skillnad, nemligen mellan besutne och obesutne, af hvilka de förra ensamme voro kompetenta till Rådsembetena, ensamme aflade ed utan borgen [4]) och hade rätt att bära vapen i staden [5]) o. s. v.; längre fram gynnades de isynnerhet i Stockholm af Regeringen framför de öfriga med stora förmåner såsom tullfrihet [6]), frihet från häktelse [7]) m. m. Äfven mellan köpmän och handtverkare hade af St.L. en skarp gräns blifvit uppdragen, hvilken hotade att bli allt större, då sedermera anspråk uppställdes, att alla köpmän skulle vara besutne [8]). Detta torde dock ingenstädes kommit till någon tillämpning. Emellertid grundades härpå ett slags Aristokati inom de Svenska städerna: man finner nemligen, att de rikare Tyska köpmännen i några städer, t. ex. Stockholm, på nämnda grundval höjt sig till en förtryckande öfvermakt öfver de Svenska. Efter denna Aristokratis störtande har väl jemlikheten icke vi-

---

1) Ang. ordets ursprung och betydelse se Schlyters Gloss. till Wisby St.L. voc. wederleghen.

2) Dock skulle de enl. Sthms Priv. 1563 § 10 "hålla all stadsens tunga" lika med borgarne. De afskaffades sedermera genom 1614 och 1617 års Handels-Ordinantier.

3) Se ByggnB. XXI, § 4; KgB. XIX § 1.

4) RådstB. XXVIII.

5) RådstB. XXXIV § 1.

6) Kbr. till Sthm af åren 1444, 1448, 1457, 1494, Priv. 1529, 1563; Kbr. till Jönköping af $^{24}/_{6}$ 1583, Tullordn. f. Åbo o. Wiborg 1581 m. fl.

7) Enl. Kbr. till Sthm af 1494 § 1 skulle bofaste borgare derstädes, blott då de efter lag förbrutit lif och ära, kunna gripas och fängslas och äfven i thy fall få ställa borgen för sig, hvilket bekräftades i 1563 års Priv. § 30 och 1570 års d:o § 13, (för Nylödöse i Priv. 1573 § 17). Jmfr ang. St.L:s hithörande stadganden Nordström Sv. Samh. förf:s Hist. II, s. 622.

8) Äfven för vissa handtverkare sökte man göra detta gällande: så föreskrefs i Skråordn. för Skräddare 1536, att ingen fick bruka embetet, som ej var "besitten": Stiernman a. st. s. 37.

vidare kommit i fara, då de Svenska köpmännen i allmänhet stodo på en alltför låg ståndpunkt, för att kunna utöfva någon despotism.

Vi hafva ofvan sökt närmare fixera St.L:s obestämda stadganden angående borgerlig rättighet och visa hvad som naturligen ligger till grund för dem. Att St.L. icke på något sätt omnämner eller söker reglera det i städerna inträngande frälsets förhållanden och rättigheter, måste väcka förvåning, då man vet, att förvecklingar deraf *redan* uppstått. Kanske får det tillskrifvas vederbörandes skygghet att vidröra en synnerligen vid dåvarande tidpunkt ömtålig fråga och fruktan för en dylik kollision, som egt rum vid Landslagens utfärdande. Saken lemnades öppen och föranledde derföre i framtiden svåra strider. Att sjelfva tanken på nödvändigheten att gifva städerna en mera sluten ställning och skyddad existens ej varit främmande för lagstiftarne, visar sig af deras omsorg att från städerna utestänga medlemmar af andra kommuner [1]). Vi hafva förut omnämnt landtmäns och gästers inskränkta rättigheter; äfven borgare voro isynnerhet i afseende på fastighetsförvärf underkastade flera kontroller, ty hvarje Byamans son eller sven som genom köp eller arf kommit i besittning af fastighet i någon stad, var skyldig att inom natt och år inflytta eller ock sälja densamma, hvilket äfven gällde för utländingar, som blifvit gårdsegare [2]). Något bestämdt förbud mot innehafvande af samtidigt burskap i flera inrikes städer, fanns i St.L. icke, men väl mot delaktighet i vederläggningar på flera ställen [3]). Ett sådant förbud utfärdades dock 1436 i Stockholms priv. [4]) af nämnde år, hvilket bekräftades genom priv. 1529, men upphäfdes genom 1563 års priv. § 27 med villkor, att skatt och tunga utgjordes på alla ställena [5]). Deremot upplifvades ofta St.L:s förbud för Svenska borgare att innehafva burskap i utländska städer [6]).

Då vi nu gå att taga en öfversigt af ofvanämnda frågas utveckling under följande tider, vilja vi först betrakta borgarnes inbördes förhållande, sedan deras ställning till de öfriga samhällsklasserna, isynnerhet

---

1) Det är dock att märka, det de hithörande stadg. lära saknas i de äldsta exempl. af St.L., se 1665 års uppl. fol. 61.

2) KgB. XV, §§ 7—9.

3) KgB. XV, § 6.

4) Vid 40 mark samt godset, som handlas med, "Herskapeno i staden till tveskiptes".

5) Jmfr Priv. för Linköping $^{1}/_{12}$ 1571 (Ryding de Lincop. s. 31); Priv. f. Norrköping $^{18}/_{6}$ 1609 § 7, för Nylödöse 1573 § 20.

6) Så 1563, Stat. af 1570 § 16, Priv. f. Nylödöse 1573 § 16.

frälset, samt till utländingar. Hvad den förstnämnda punkten beträffar, så hafva vi redan nämnt den vigt, som alltmer lades på besutenhet, och de nya rättigheter, hvarmed man sökte befordra dennas framsteg. Köpmansklassen skulle höjas och uppmuntras genom handelstvång och prohibitiva förmåner, ja genom förbud för de mindre bemedlade att befatta sig med köpenskap [1]). Äfven handtverksklassen sökte man lyfta genom privilegier och skrån, hvarvid speciellt burskaps vinnande försvårades och sattes i beroende af skrået [2]). Å andra sidan sökte man lika ifrigt från städerna utestänga allt "löst sällskap", som undandrog sig de borgerliga skyldigheterna, eller s. k. friborgare. Det befanns snart nödvändigt, att modifiera St.L. i denna punkt. Redan Christian II har 1521 gifvit Rådet i Stockholm tillstånd att hindra den köpenskap, som "de 5-öresborgare bedrifva, städerna till stor dråplig skada och förderf" [3]), och enligt Kbr. af 1531 skulle dessa 5-öresborgare "läggas utaf allestäds" [4]). Allt "onyttigt folk" skulle utvisas [5]), och Gustaf Adolf förklarade slutligen 1617, att icke hvem som ville skulle få blifva borgare, utan blott de som lärt ett redligt embete eller förmå bruka köpenskap [6]). Derjemte inskärptes oupphörligen den grundsatsen, att alle som drefvo borgerlig näring [7]) också skulle utgöra all borgerlig tunga [8]), hvarigenom denna småningom öfverflyttades på egentliga näringsidkare. De senare framstå derföre afgjordt som de ende berättigade "Byamännen."

Dessa Byamän voro dock numer icke stadens enda innevånare: i ett stort antal städer funnos äfven de öfriga samhällsklasserna repre-

---

1) Se Mandatet af 1546 m. fl.

2) Skråna blefvo i detta fall alltmer despotiska och understöddes deri af Rådet: vinnande af burskap ställdes i beroende af godtyckliga afgifter och skänker.

3) Ekdahl a. st. ss. 1345—6.

4) "Desslikes" heter det "inhysesmän och månglare, som icke förmåkta besitta hus eller hemman, utan göra stort oköp i alla städer". Detta visar ytterligare tendensen att grundlägga allmän besutenhet. Jmfr Priv. för Westerås $^{1}/_{2}$ 1539: "ingen tillstädes i så måtto (neml. att de gifva ut 5 öre på disken) att komma med dem i Borgerskap, utan de der vilja bygga och bo med dem i staden - - brukandes deras redeliga handtering och köpmanshandel": Wicander de Arosia p. 14.

5) Stiernman OEcon. Comm och Pol. stadg. I, ss. 20, 84, 86.

6) Widekindi Gust. Ad:s Hist. s. 377.

7) "Till 4 penningars värde" tillägges i Hertig Carls bref till Örebro $^{17}/_{9}$ 1578: Bagge a. st. s. 32.

8) Till denna borgerl. tunga hörde utom kronoutskylder och kommunalskatter äfven vakt, gästning och dagsverken.

senterade. Sådane voro adel, prester och konungstjenare, hvilka alla hvar för sig gjorde anspråk på friheter. Först och främst förvandlade de "krononės skattgilla jord" till frälse och ökade derigenom för staden utlagorna till Kronan, vidare började de att utsträcka sina anspråk på skattefrihet äfven till kommunalafgifter och skott [1]), slutligen, hvilken var den svåraste olägenheten, fritogo de under skydd af sina privilegier hvarjehanda näringsidkare från de gemensamma bördorna. Häremot utfärdades visserligen förbud: så genom 1396 års reduktionsstadga, der det heter (§ 9), att med alla gårdar i köpstäderna skulle förhållas så som deras "Byarätt" utvisar, d. v. s. att de skulle återkomma under stadsrätt [2]). Historien lärer nogsamt, huru mycket dylika förbud aktades under följande århundraden. Det var isynnerhet Frälset, som på detta sätt småningom gjorde allt större intrång i städerna; resultatet häraf beskrifves af Carl IX med följande ord: "Frälset har i förtiden med köp, pant, skifte och andra behändiga medel under sig kommit tomter, hus och liggande grunder i städerna, hvarigenom Borgerskapet, som skulle svara till deras tunga, är vordet märkeligen minskadt och försvagadt, tomter mångenstädes öde och obyggde, hjelpen till menige bästa (d. v. s. kommunalskatterna) afkortad, såsom ock den skatt, kronan tillkommer, derigenom försnillad" [3]). Gustaf I var den, som först sökte sätta en dam för dylika missbruk, och det så, att alla på detta sätt uppkomna friheter afskaffades. Så förklarade han i bref till Stockholm $^{25}/_{9}$ 1554, att ingen konungens tjenare, som egde gård och grund i staden, skulle "stinga sig undan" stadens tunga, ej heller Frälset, ty "ingen herre eller konung före oss hafver någonsin gifvit frälse på hus och gårdar i köpstäderna, icke finnes det heller i lagen, att de skulle vara under frälset, derföre kunna vi ej heller efterlatet" [4]). Derefter pålades genom 1557 års Ordinans, till förbättrande af Stockholms stads ränta, på *hvarje* hus en årlig skatt af ½ mark för hvart 100 mark örtuger i värde [5]). Detta har dock icke länge fortfarit: redan i 1563 års priv. § 4 inskränktes den borgerliga

1) Från Upsala klagas från början af 1400-talet, att der bo många, som vilja njuta, men få, som något vilja skjuta och till skatt hjelpa. — Upsala Priv.bok.

2) Hadorph Bih. till RimKrön. s. 66. Jmfr dens. Gambl. Stadg. s. 32.

3) Bref till Borgm. och Råd i Örebro 1584: Ekholm Svenska Fatburen III, s. 61.

4) Palmsch. Top. XIV. Jmfr Kbr. $^{19}/_{2}$ 1545, att skottet skall i Sthm utgöras äfven af dem, "som ej bruka annan köpenskap än sätta ut sina penn. på ocker och ränta"; Kbr. till Falköping $^{7}/_{2}$ 1551, att de som bo å frälsegårdar draga stadens tunga. Jmfr Kbr. till Wadstena $^{14}/_{6}$ 1559. — RRegistr.

5) § 1 (Palmsch. d:o).

tungan till dem, "som bruka handel, vandel och borgarenäring", hvaremot alla andra gårdsegare såsom "furstar, grefvar, friherrar, adelsmän, prester, bönder och andre" blott skulle utgöra någon hjelp till stadens byggning af deras hus, "eftersom tidens lägenhet kan fordra" [1]). Äfven enligt Johan III:s hithörande förordningar voro blott de adelsmän och herretjenare, som idkade borgerlig näring, också underkastade borgerlig tunga [2]), hvaremot han sökte hjelpa saken genom att strängeligen förbjuda alla andra frihetsbref än dem K.M. sjelf utfärdat [3]). Mot prester och bönder visade han sig dock strängare: alla sådana, som köpt hus i Stockholm och ej sjelfva bebodde dem [4]), skulle enl. Kbr. $^{8}/_{11}$ 1577 upplåta dem till köp åt borgare efter mätismannaordom eller ock hafva förbrutit dem "under oss och Kronan" [5]). Carl IX såsom Hertig och Konung var den, som gjorde de kraftigaste försöken att rensa städerna från alla oborgerliga elementer och i allmänhet att skydda dem för allt slags intrång, vare sig af in- eller utländske. Till en början riktade han sin uppmärksamhet på Frälsets utestängande från städerna [6]) och förordnade för Nyköping, Mariestad och Örebro 1580—1584, att ingen borgare skulle få på något sätt afhända sig gård eller grund under Frälset vid 40 marks böter eller (för Mariestad) bördsrättens återfallande till honom igen [7]). Dessa bestämmelser utvidgades seder-

1) Jmfr Kbr. till Jönköping af $^{28}|_{4}$ 1561, till Westervik $^{6}|_{2}$ 1561. — I skeppsgården 1566 skulle *alla* i städerna boende deltaga. Enl. Kbr. till Kalmar $^{28}|_{6}$ 1566 skulle Kon:s tjenare, som ej idka borgerlig näring, blott hjelpa till stadens befästning. RRegistr.

2) Se t. ex. Priv. för Sthm 1570 § 4, Kbr. 1589 om Norrl. segl. jemte en mängd andra. — Dock skulle enl. Kbr. till Rådet i Upsala $^{14}|_{10}$ 1583 alla gårdsegare utan undantag hjelpa till vid byggn. af hospitaler, Rådstufva o. a. d. RRegistr.

3) Kbr. $^{22}|_{6}$ 1573, d:o $^{14}|_{7}$ 1585. I det senare brefvet påpekas särskilt ogiltigheten af frihetsbref från Hertig Carl eller andra hans syskon, "efter vi här i vårt kongerike icke känna någon god före att vara vår like i makt och välde." — Nordin. Saml. Hist. Urb.Sv.

4) Detta skulle äfven gälla om borgarne sjelfva, så vida de ej hade barn, som kunde öfvertaga desamma; enl. Kbr. $^{16}|_{1}$ 1573 till Ståth. i Sthm.

5) Nordin. Saml. Hist. Urb.Sv. Det heter i detta bref besynnerligt nog, att prester och bönder uppköpa de flesta hus, som kunna vara till salu i Sthm, dem de sedan förhyra åt löst parti, som ej göra någon rättighet till staden.

6) Redan Johan III hade dermed gjort början, i det han vid bördsrättens inlösande i städerna (hvilket af honom till och med anbefalltes: se Kbr. af 1582, 87 o. 91: RRegistr.) förbjöd att sälja jorden under Frälset.

7) Bref till Nyköping af 1580 och 1584 (Saml. St.Priv. i R.Ark.); Priv. för Mariestad 1583 § 2 (Tidström de M. p. 40), bref till Örebro af 1584 (förut anfördt).

mera och skärptes betydligt: utom Frälset inbegrepos i förbudet prester, fogdar, skrifvare, ryttare och knektar, och straffet höjdes ända till fastighetens förlust, ½ under Kon. och ½ under staden[1]). Vidare sökte Carl IX att på annat sätt försvåra åtkomsten af fastighet i städerna för icke-borgare, genom att underkasta hvarje sådant förvärfvande nya och starka kontroller till stadens och borgerskapets förmån. Hvar och en som sätter sig ned i staden, bör utlofva att der bo qvar i alla sina lifsdagar: vill han dock sedermera sälja sin fastighet och flytta hädan, skall han först hembjuda henne till slägten, dernäst till instädes borgare, sedan till Borgmästare och Råd å stadens vägnar, sist till Konungen eller hans arfvingar, men ingalunda till Frälseman eller utstädes borgare[2]). Gör han ej så, vare fastigheten förbruten ½ under Konungen och ½ under staden. Dör en besuten borgare utan någon arfvinge, som kan öfvertaga gården och blifva borgare, skall Konungens Fogde dermed företaga ungefär samma procedur[3]). Skulle någon adelsman, prest, utstädes borgare eller annan, som ej bor i staden, der ega någon tomt, skall denna upplåtas åt någon borgare eller "besättas" med sådane, som draga borgerlig tunga: sker detta ej inom 3 år, verkställes detsamma efter värdering af Borgmästare och Råd[4]). Dessa grundsatser tillämpades nu för de i noterna anförda städer med några modifikationer för hvar stad och blefvo i det följande utsträckta äfven till flera andra. Att den jord, som af Konungarne efter hand donerades åt städerna till deras förkofring, blott skulle upplåtas sådane stadsinnevånare till nyttjande, som brukade handel och borgarenäring, säger sig sjelft och utsades äfven uttryckligen i flera donationsbref[5]).

---

1) Se Priv. för Wimmerby 1604, Kbr. till Strengnäs och Thorshälla $^{17}/_{2}$ 1609, Priv. för Trosa $^{19}/_{4}$ 1610 § 14 (Palmsch. Top. XXXI), d:o för Ulå $^{26}/_{9}$ 1610 § 11 (Snellman de urbe Uloa). Jmfr Resol. f. Sthms borgare $^{4}/_{6}$ 1603 (RRegistr.), der detsamma åläggες alla ur staden utflyttande borgare.

2) Se Priv. för Mariestad 1583 § 2, Priv. för Torsilia $^{12}/_{8}$ 1593 § 3 (Palmsch.), för Köping af 1608, för Trosa § 16 och Ulå § 17 af 1610. Jmfr Privil. för Wiborg och Åbo 1600, för desamme o. Borgå 1607.

3) Se anf. Priv. för Wimmerby, Trosa och Ulå, Priv. för Enköping 1610 § 4.

4) Se Priv. för Jönköping $^{20}/_{3}$ 1596 § 6, (Handl. Skand. Hist. XXXII, s. 462), Kbr. till Upsala af 1597 (stadens Priv. bok). Jmfr äfven Kbr. till Söderköping 1595 (RRegistr.) Privil. för Åbo och Wiborg 1600 § 6. — Ungef. samma stadg. förekommer redan i Priv. för Skara af 1527 (Palmsch.).

5) Se t. ex. "Öppet försvarelsebref" för Westervik, Söder- Norr- och Linköping mot Adeln och andra $^{30}/_{7}$ 1599: egorna skola delas mellan borgarne, som draga stadens tunga, och Rådet eljest hafva makt "vederkännas" dem. Jmfr Kbr. till Enköping

Af det föregående hafva vi sett, hvilka bemödanden af flera Regenter gjordes att lyfta borgerskapet i städerna: ett stående drag deri var försöket att göra besutenheten allmän. Syftemålet var dock ännu långt ifrån att uppnås, ej heller ändrades i väsentlig mån städernas forna förhållanden genom dessa planer. Någon priviligierad klass *inom* sjelfva borgerskapet förmådde icke det oaktadt bilda sig. Orsakerna härtill hafva vi hufvudsakligen redan angifvit. Samma orsaker hafva äfven motverkat och hindrat uppkomsten af Rådsvälde i våra städer och alltjemnt uppehållit det demokratiska elementet, som från början förefanns och äfven i St.L. blef legitimeradt, eller med andra ord menighetens deltagande i stadens vigtigare angelägenheter. Detta deltagande visar sig först och främst på rättskipningens område, i de många nämnder af byamän, som för olika ändamål af rätten eller parterna sjelfva utsågos, samt i det flerstädes herrskande bruket att supplera rätten med adjungerade byamän, ja att till och med fordra samtliga byamännens inställande vid alla Rådstufvudagar. Ett vida direktare inflytande utöfvades af menigheten i val och administrativa mål å de allmänna s. k. Byamoten. Vi hafva förut anfört exempel på menighetens deltagande i de årliga embetsmannavalen å Walborgsmässo-Rådstufvan, ehuru det väl egentligen blott var i de mindre städerna, som menighetens röst dervid ansågs nödvändig eller afgörande. Angående öfriga allmänna kommunalsammankomster eller, som de kallades på somliga ställen, "menige mans Rådstufvor" [1]), innehåller St.L. inga närmare bestämmelser, än att Borgmästarne kunde sammankalla "Allmogan", då Konungsbud kommo eller ock "them wårdar um annur stadhsens ärende tala", då Byamännen vid plikt skulle infinna sig [2]). Häri ligger, som man ser, ingen säker garanti för menighetens rätt: bristen derpå har dock sällan framkallat större olägenheter, utan allt har gått sin gilla gång, och praxis på de flesta ställen blifvit att rätt ofta sammankalla allmänna Rådstufvor, ja i en del städer har Rådet dervid gifvit menigheten del äfven af stadens räkenskaper och andra speciellare frågor [3]).

$^{22}/_{1}$ 1600, Priv. f. Hjo af 1610, Kbr. ang. Mariestad af $^{26}/_{2}$ 1611. Utdelningen verkställdes än af Rådet, än af särskilta tillförordnade (dessa skulle enl. Kbr. till Falköping $^{8}/_{11}$ 1606 från vissa folkrika härader *taga ut en från hvar gård* och tilldela honom åker i F.). — RRegistr.

1) Sthms T.B. från slutet af 1500-talet.

2) RådstB. II § 4, jmfr ByggnB. VIII (der det heter, att Fogde, Borgmästare o. Råd sammankalla), och KgB. XX, § 9.

3) I 1600 års Tullordning föreskrifves, att stadens förmän skola årligen göra menigheten redo och räkenskap för vissa inkomster: Stiernman I, s. 458.

Emellertid kunde det icke fela, att ju stora olägenheter på vissa ställen skulle blifva följden af dessa folkförsamlingar i massa: i de större städerna kunde dervid icke undvikas de oordningar och tumultuariska uppträden, som äro oskiljaktiga från sammanrafsade och orepresenterade folkhopar, der alla anse sig lika berättigade att afgöra frågan, men ingen erkänner sin skyldighet att granska och göra sig redo för densamma. Det ligger derföre i sakens natur, att redan tidigt försök skulle förekomma att genom ett fåtal bestämda och ansvariga personer ersätta en larmande och oåtkomlig folkhop. En sådan representation kan på sätt och vis anses ligga i de många embetsmän, som ur Byamännens krets utsågos till Rådets biträde. Men mera egentligt kan man anse fröna till en sådan ligga i den procedur, som St.L. föreskrifver vid skottets upptagande. Då skulle nemligen några män "aff Allmoganum tiltakas skuth att läggia" och "förskuth lijka." Ur detta stadgande bildade sig enligt praxis i olika städer olika organisationer, hvilka slutligen, på några ställen i samverkan med andra förhållanden och stundom efter utländska förebilder, gifvit upphof åt den inrättning, som numera i våra städer kallas de Älstes Råd.

En dylik organisation uppstår snart af sig sjelf i hvarje kommun, som utvecklar sig normalt, då befolkningen tillvexer och ärendena mångfaldigas, då man finner olämpligheten och ofruktbarheten af de ofvan skildrade oordnade sammankomsterna. Liksom all representation förutsätter densamma en viss högre ståndpunkt och mer utvecklad allmän-anda. Benämningen de Äldste (som för öfrigt ej förekommer i våra städer förr än kring medlet af 1600-talet) är, liksom så mycket annat, hämtad från de Lübska städerna. I Lübeck nämnas första gången 1265 de s. k. majores sive seniores vid Consulernas sida i vissa vigtigare frågor, och förekomma sedan i Lübeck och andra Nord-Tyska städer framgent under olika benämningar: jurati, prudentes, discreti, de Wittigsten o. s. v. Dessa utskott af stadens menighet voro från början tillfälliga och utgjordes egentligen af de inflytelserikaste borgarne, som Rådet fann för godt att tillkalla för vissa ärenden. Småningom stadgade sig praxis och framkallade bestämda grundsatser och former för dessa utskotts verksamhet [1]). Vi kunna ej med visshet uppgifva, om denna organisation blifvit under Medeltiden efterbildad i någon Svensk stad: troligt nog är väl, att det skett i Stockholm, åtminstone finner man 1494 Rådet sekunderadt af 24 gode män

1) Frensdorff a. st. s. 200 ff.

på menighetens vägnar vid en sammankomst med Riksens Råd[1]). Det säkra är emellertid, att man 1524 finner Stockholm i besittning af de Åldstes Råd, biträdande Rådet vid en finansfråga[2]). Om icke detta Råd blott var en utbildning af tidigare förhållanden, så ligger den förmodan närmast till hands, att detsamma ungefär vid samma tid blifvit inrättadt genom Lübskt inflytande. Detta senare var, som bekant är, just då mycket starkt, och kort förut hade i följd af reformationens stormar med thy åtföljande demokratiska rörelser i Lübeck blifvit upprättadt ett permanent borgareutskott, till en början bestående af 48 medlemmar[3]), hvilket antal just var det för Stockholm antagna och sedermera under lång tid gällande. Vare härmed huru som helst, det vissa är, att "de 48" sedermera allt framgent, ehuru i början temligen sällan, uppträdde som representant af menigheten vid Rådets sida i åtskilliga vigtigare angelägenheter, speciellt sådana som rörde stadens drätsel, skatteväsende och jordområde[4]). Den nya myndigheten har äfven snart nog af Konungamakten blifvit erkänd, ty i Gustaf I:s Ordinans för Stockholm 1557 § 12 föreskrifves, att alla eldfarliga byggnader skola "efter de 48 af menighetens ransakning och sägen" nedrifvas. Deras befogenhet beskrifves i största allmänhet i stadens Embetsböcker (från 1582), der de finnas uppräknade, sålunda: "desse 48 Borgare äre af menige Borgerskapet utkorade Borgm. och Råd till hjelp, när vigtige saker förefalla å Rådstugan, *som belanga K. M:t och menige borgerskapet*" (eller "hela staden"). Från 1605—1618 voro de sista uttrycken ändrade till " — — som anlange H. K. M. vår allernådigste konung"[5]). Detta formulär påminner om St.L. RådstB. II, som särskilt föreskrifver allmänt Byamot, "då Konungsbud kommer", vid hvilket tillfälle således menigheten skulle föreställas af de 48. — Vi se häraf, att Gustaf Adolfs organisation i 1619 års stadga icke, som man trott, var en alldeles ny inrättning, utan upptagen och lånad från Stockholms stadsförfattning, inom hvilken hon redan fortlefvat åtminstone 100 år.

---

1) Ett liknande exempel finnes från Åbo 1425, då "12 dandemän af menheten" å dennas vägnar utan Rådets medverkan underhandlade med Konungen, se Grönblad a. st. n:o 23.

2) "Feria 4:a post Olavi: Borgmästare, Råd *och de 48* undsatte min herres nåd med 3000 mark till knektarne på Gotland lågo", heter det i Olai Petri T.B. för 1524.

3) Sedermera ökadt till 56, 64, slutl. 164: Hach d. Alte Lüb. Recht inledn.

4) Se Sthms Tänkeböcker från 1547 (de närmast föregående äro förkomna).

5) Sthms RhusArk.

Men äfven i flera mindre städer finner man redan före 1619 ett dylikt borgareråd, ehuru icke så utbildadt som i Stockholm, och det af helt och hållet inhemskt ursprung, nemligen uppkommet ur Skottmännen eller skattejemkningsmännen. Dessa tillfälliga taxeringskommittéer hade i somliga städer blifvit till antal och befogenhet utvidgade och bestämda genom en lång praxis. Så finner man i Arboga 1615 och 1616 ett utskott af 12 män, i Westerås 1617 24 män "af gemene Borgerskapet", "som det året kallade voro att lägga årsskatten" [1]). Dessa utskott blefvo längre fram och under inverkan af 1619 års stadga ombildade till städernas s. k. Äldste, hvilka derföre ock framträdde olika till antal och befogenhet i olika städer.

1) Se Arboga och Westerås städers Tänkeböcker i Sv. Hofr. Ark.

Om Asteroiden Alexandra (54).

Fjerde Element-Systemets Jemförelse med Observationerna

AF

H. SCHULTZ.

Sedan hösten 1858, då denna planet upptäcktes i Paris, har jag sysselsatt mig med dess theori, och publicerat mina räkneresultat i Berliner Jahrbuch och i Astr. Nachrichten.

En summarisk berättelse öfver dessa arbeten finnes intagen i A. N. N:o 1287, hvarest jag redan angifvit, huru det sista (4:de) elementsystemet, på hvilket efemeriderna för år 1861 äro grundade, erhållits ur de tvänne hittills observerade oppositionerna.

Min närmaste uppgift är nu att genomföra en noggrann jemförelse mellan dessa element och de ursprungliga observationerna, för att bilda nya normalorter och undersöka, om störande fel möjligen förekomma i observationerna eller i de antagna medelloca för komparationsstjernorna.

Såsom en historisk inledning angifver jag först i ordning de fyra elementsystemen, som resulterat af mina räkningar, och om hvikas härledning jag anfört det vigtigaste i Astr. Nachr. l. c. Dessa elementsystem, som antogos oskulerande för epoken, och i hvilka Π*), Ω och i alltid referera sig till medelæqvinoctium och ekliptikan för samma tid voro följande:

*) Betydelsen af allmänt antagna beteckningar angifves vanligen icke i denna upsats.

Elementsystemet I.

Epok 1858 December 30,0 m. Berliner tid

$M_0 = 52^0\ 36'\ 12'',6$
$\Pi = 293\ 39\ 27\ ,2$
$\Omega = 313\ 50\ 47\ ,0$
$i = 11\ 47\ 29\ ,6$
$\varphi = 11^0\ 30'\ 9'',2$
$\mu = 796'',3940$
log. $a = 0,432586$

Elementsystemet II.

Epok 1858 Decemb. 30,0 m. B. tid.

$M_0 = 52^0\ 25'\ 54'',82$
$\Pi = 293\ 56\ 0\ ,41$
$\Omega = 313\ 50\ 17\ ,53$
$i = 11\ 47\ 8\ ,98$
$\varphi = 11^0\ 28'\ 43'',82$
$\mu = 796'',37407$
log. $a = 0,4325930$

Elementsystemet III.

Epok 1858 Decemb. 30,0 m. B. tid.

$M_0 = 52^0\ 6'\ 37'',18$
$\Pi = 294\ 20\ 24\ ,70$
$\Omega = 313\ 49\ 12\ ,79$
$i = 11\ 46\ 58\ ,06$
$\varphi = 11^0\ 28'\ 9'',82$
$\mu = 795'',12315$
log. $a = 0,4330481$

Elementsystemet IV.

Epok 1858 Dec. 30,0 m. B. tid.

$M_0 = 52^0\ 10'\ 37'',10$
$\Pi = 294\ 16\ 40\ ,51$
$\Omega = 313\ 49\ 29\ ,25$
$i = 11\ 46\ 59\ ,36$
$\varphi = 11^0\ 27'\ 42'',55$
$\mu = 795''56379$
log. $a = 0,4328877$

Innan jag öfvergår till det sista systemets jemförelse med observationerna, anförer jag i följande tabell dessa in extenso, så vidt de äro mig bekanta.

Meridian-Observation i Paris.

1858 Sept. 13. 21^h 37^m 27^s,83 — 6° 3′ 28″,0.

Observationer i Leyden (Astr. Nachr. 1187).

1858	Leydn. M.T.	α (54) =	δ (54) =	App. α (54)	App. δ (54)
Sept. 15	9^h 46^m 25^s,5	α* — 1° 20′ 17″,1	δ* + 1′ 50″,1	324° 4′ 34″,9	— 6° 1′ 27″,1
16	9^h 57^m 0^s,7	α* — 1° 28′ 26″,4	δ* + 2′ 51″,6	323° 56′ 25″,5	— 6° 0′ 25″,6

Komp. Stjernans Medellocus 1858,0.

	α	δ	
	325° 23′ 54″,2	— 6° 3′ 29″,8	Lal. 42512
	55″,5	36″,3	Wash. Obs. Cat. 1113
	325° 23′ 54″,9	— 6° 3′ 33″,1	
Sept. 15. Redukt. t. app. locus	+ 57″,1	+ 15″,9	
Sept. 16. D:o	+ 57″,0	+ 15″,9	

Observationer i Berlin (Astr. Nachr. 1213).

1858	Berlin. M.T.	α (54) =	δ (54) =	App. α (54)	App. δ (54)
Sept. 16	12^h 0^m 12^s	α(a) — 1° 28′ 56″,1	δ(a) + 2′ 55″,6	323° 55′ 53″,1	— 6° 0′ 24″,1
17	13 5 5	α(a) — 1 36 57 ,4	δ(a) + 4 1 ,3	323 47 51 ,9	— 5 59 18 ,5
20	13 11 37	α(b) + 50 52 ,7	δ(b) — 4 7 ,3	323 27 33 ,4	— 5 56 0 ,2
25	9 14 53	α(b) + 26 51 ,2	δ(b) + 1 52 ,7	323 3 31 ,1	— 5 50 0 ,1
Okt. 15	11 2 7	α(c) + 0 29 ,3	δ(c) — 5 52 ,6	323 17 23 ,9	— 5 11 21 ,6
16	7 37 42	α(c) + 5 2 ,6	δ(c) — 3 39 ,3	323 21 57 ,2	— 5 9 8 ,3
19	7 18 33	α(c) + 23 3 ,6	δ(c) + 4 37 ,9	323 39 57 ,7	— 5 0 51 ,2
26	9 42 22	α(d) + 17 13 ,3	δ(d) + 2 23 ,7	324 35 50 ,4	— 4 38 6 ,0
Nov. 7	11 1 44	α(c) + 34 16 ,7	δ(e) + 0 8 ,7	326 49 41 ,4	— 3 49 54 ,3
13	7 43 52	α(f) + 24 51 ,4	δ(f) + 3 30 ,4	328 10 0 ,2	— 3 21 54 ,7
20	9 37 33	α(g) + 57 48 ,0	δ(g) + 5 58 ,5	329 58 6 ,4	— 2 44 7 ,1
Dec. 17	7 39 16	α(h) + 5 ?56 ,6	δ(h) — 1 47 ,8	338 13 56 ,6	+ 0 16 30 ,4
18	7 44 49	α(i) + 22 33 ,4	δ(i) — 4 7 ,5	338 34 24 ,2	+ 0 24 13 ,7
1859					
Jan. 4	8 39 21	α(k) + 20 47 ,6	δ(k) — 0 58 ,6	344 37 35 ,7	+ 2 46 7 ,6
5	6 29 27	α(l) — 9 19 ,1	δ(l) — 4 56 ,1	344 57 49 ,9	+ 2 54 15 ,9
6	5 40 7	α(m) — 17 51 ,4	δ(m) + 1 15 ,5	345 19 12 ,1	+ 3 2 50 ,5
26	7 45 16	α(p) — 4 48 ,8	δ(p) — 6 19 ,6	352 58 5 ,9	+ 6 11 30 ,4
Febr. 18	6 50 23	α(q) — 68 8 ,5	δ(q) — 6 26 ,7	2 5 43 ,3	+ 10 3 13 ,9
19	7 8 12	α(q) — 43 37 ,1	δ(q) + 3 59 ,8	2 30 14 ,7	+ 10 13 40 ,5
20	7 6 12	α(r) + 9′ 1″,5	δ(r) — 1′ 33″,7	2 54 28 ,9	+ 10 23 54 ,9
*Dec. 2	8 0 36	mig ej	bekanta	78 35 29 ,6	+ 37 27 5 ,1
* 15	8^h 28^m 27^s			74° 55′ 10″,1	+ 36° 49′ 9″,7

* Enligt bref från Berlin.

1861	Berlin. M.T.	α (54) =	δ (54) =	App. α (54)	App. δ (54)
*Febr. 14	14h 5m 33s	De ursprungliga obs. ej angifna.		145° 16′ 26″,0	+ 10° 22′ 22″,0
*Mars. 1	12 56 36			141 51 30 ,4	+ 10 50 8 ,1
* 6	8 17 4			140 53 34 ,4	+ 10 57 48 ,1
* 7	8h 29m 18s			140° 42′ 7″,2	+ 10° 59′ 14″,9

* Enligt bref från Berlin.

Fotometriska Bestämningar.

1858 Okt. 26: m = 11,0. 1859 Jan. 5: m = 11,9. Jan. 22: m = 12,2. Febr. 18: m = 12,5.

Komp. Stjernornas Medelloca.

		α	δ	
1858,0	a)	325° 23′ 52″,3	— 6° 3′ 35″,6	B.Z. 122, Lal. 42512, Tayl. 10134.
	b)	322 35 44 ,3	— 5 52 8 ,0	Lal. 42106, B.Z. 100, 122.
	c)	323 16 2 ,4	— 5 5 44 ,3	B.Z. 100.
	d)	324 17 46 ,6	— 4 40 44 ,9	B.Z. 122.
	e)	326 14 36 ,3	— 3 50 19 ,0	B.Z. 100, S. II 438 (2).
	f)	327 44 21 ,2	— 3 25 41 ,4	B.Z. 109, S. II 440 (2).
	g)	328 59 31 ,7	— 2 50 22 ,1	0 Aquarii Mädler.
	h)	338 7 26 ,3	+ 0 17 59 ,5	Brünnow Astr. Not. 2.
	i)	338 11 6 ,1	+ 0 28 2 ,5	B.Z. 34.
1859,0	k)	344 16 49 ,8	+ 2 47 5 ,7	B.Z. 36.
	l)	345 7 10 ,6	+ 2 59 11 ,5	B.Z. 14, 25, Brünnow (2).
	m)	345 37 5 ,1	+ 3 1 34 ,3	Brünnow.
	p)	353 2 56 ,8	+ 6 17 49 ,0	B.Z. 38.
	q)	3 13 53 ,9	+ 10 9 38 ,6	B.Z. 29, R. 51. Jemf. m. q′ och q″.
	q′)	3 18 32 ,3	+ 10 8 10 ,1	B.Z. 29, R. 58.
	q″)	3 24 47 ,2	+ 10 11 42 ,7	B.Z. 29, R. 64.
	r)	2° 45 29 ,7	+ 10° 25 26 ,7	B.Z. 29, S. VI. 4, R. 31.
	q—q′	= — 4 43 ,5	+ 1 29 ,2	
	q—q″	= —?4′ 49″,5	— 2′ 6″,2	

Observationer i Königsberg (Astr. Nachr. 1181 och 1266).

1858	Königsb. M.T.	α (54) =	δ (54) =	App. α (54)	App. δ (54)
Nov. 4	9h 32m 40s,8	α(dd) — 4′ 3″,0	δ(dd) — 13′ 21″,5	326° 11′ 20″,1	— 4° 3′ 23″,1
1859					
Nov. 30	9 2 46	α (a) + 16 23 ,9	δ (a) + 8 9 ,2	79 58 37 ,2	+ 37 30 25 ,1
Dec. 2	8 12 6	α (a) — 16 23 ,7	δ (a) + 4 46 ,6	78 35 50 ,2	+ 37 27 2 ,7
3	8 43 42	α (a) — 33 39 ,0	δ (a) + 2 48 ,3	78 18 35 ,2	+ 37 25 4 ,5
21	9h 49m 33s	α (b) + 30′ 35″,3	δ (b) — 1′ 33″,1	73° 18′ 43″,2	+ 36° 23′ 19″,9

Komp. Stjernornas Medelloca 1858,0 och 1859,0.

A. N. 1181. dd) Weisse's C. H. 21 N:o 1056: 326° 14′ 34″,1 — 3° 50′ 17″,7

A. N. 1266. {a) Meridian-Obs. i Königsb. : 78° 50′ 40″,2 + 37° 22′ 5″,3
{b) d:o d:o : 72° 46′ 32″,1 + 36° 24′ 36″,9

Fotometriska Bestämningar.

1859. Dec. 2: m = 11,5. Dec. 21: m = 11,4.

Meridian-Observationer i Greenwich (Monthly Notices Vol. XIX).

1858	Greenwich. M.T.	App. α	App. δ
Okt. 25	7^h 22^m $13^s,1$	324^0 $26'$ $26'',1$	-4^0 $41'$ $41'',1$
30	7^h 5^m $45^s,4$	325^0 $14'$ $31'',1$	-4^0 $23'$ $46'',5$

Anmärkningar öfver observationerna och de använda komparationsstjernorna.

Utom här upptagna observationer finnas:

1:o) Tvänne från Bilk i September 1858, men hvilka till följe af deras betydliga afvikelse från observationerna i Berlin och Paris genast uteslötos ur räkningen.

2:o) Fyra cirkelmikrometerobservationer från Wien (Oktober 1858), hvilka ännu användes vid beräkningen af tredje elementsystemet, men sedan uteslötos.

3:o) En Berlinerobservation (26 Febr. 1859), om hvilken jag redan talat Astronom. Nachr. N:o 1287.

4:o) En Greenwicherobservation af den 27 Decemb. 1859, hvilken jag funnit ej tillhöra planeten.

Enligt denna skulle planetens apparenta koordinater vara (Monthl. Not. XX) för

1859 Dec. 27. 10^h 23^m $57^s,0$ Greenwich. medeltid.

app. $\alpha = 71^0\ 51'\ 23'',9$, app. $\delta = +35^0\ 53'\ 43'',8$.

Ur tredje elementsystemet erhölls efter anbringande af perturbationerna för samma tid

app. $\alpha = 71^0\ 49'\ 6'',96$ app. $\delta = +35^0\ 53'\ 15'',62$, hvaraf således erhålles följande differenser mellan beräkning och observation

$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
$-2'\ 16'',9$	$-28'',2$.

Jemförelsen af systemet (3) med Berlinerobservationerna (Dec. 2 och 15) gaf deremot

$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
$-72'',8$	$-9'',8$
$-69'',3$	$-8'',4$.

Komparationsstjernorna har jag ånyo reducerat, såvidt de dertill behöfliga stjernkatalogerna funnos att tillgå, och har jag härvid följande anmärkningar att göra:

1:o) Stjernan a) 1858 för Berl. obs. i Astr. Nachr. 1213 är densamma som Hoeks i N:o 1187, och den kunde ej kontrolleras, då jag saknade Bay. Laland, Taylor, och Wash. Obs. Cat.

För att göra de fyra observationerna den 15, 16 och 17 September med hvarandra fullt jemförbara, antog jag för dem alla samma medelposition för stjernan, nämligen ett medium af Försters position (med vigten 3) och den af Hoek angifna positionen enligt Wash. Obs. Cat. (med vigten 1). Jag gifver ej Wash. Obs. Cat. större vigt, emedan, enligt D:r Försters uppgift, hans bestämmningar den 16 och 17 äro att anse såsom särdeles pålitliga.

2:o) Stjernorna b), e), f) och r) i Försters observationer (Nachr. 1213) kunde ej heller kontrolleras, emedan utom Bay. Laland äfven Santinis Katalog saknades. Stjernan e) är densamma som dd) i Königsbergerobs. 1858 Nov. 4 (A.N. 1181); och jag använde äfven Försters position för denna observation.

3:o) Stjernan c) hos Förster beräknades ånyo och samma position återfanns.

4:o) Stjernan d) i Berlinerobservationerna kunde ej återfinnas i Bessels Zoner 122. Den enda stjernan hos Bessel, som hade någon likhet med den angifna, var

$$21^h\ 34^m\ 18^s{,}44 \quad - 4^0\ 48'\ 27''{,}2.$$

Jag hade således ej annat val än att behålla den af Förster angifna positionen oförändrad.

5:o) Stjernan g) (= o Aqvarii = 2883 Mädler) i Berl. Obs. beräknades sålunda:

1850,0 ...	328° 53′ 18″,80	— 2° 52′ 38″,62	enligt Mädler.
8 års mot. propr.	— 0″,40	— 0″,07	
	328° 53′ 18″,40	— 2° 52′ 38″,69	
præcess.	+ 6′ 12″,60	+ 2′ 17″,42	
	328° 59′ 31″,0	— 2° 50′ 21″,3	

Dessa tal äro ej desamma som de af Förster angifna. Observatören har tydligen anbragt någon korrektion, för att reducera Mädler till Bessel, och möjligen användt annan mot. propr. Enligt den anförda positionens jemförelse med Försters borde denna korrektion vara

$$\Delta\alpha = +0''{,}7, \quad \Delta\delta = -0''{,}8.$$

Enligt Auwers uppgifter i Astr. Nachr. 1300 får jag

Wolfers (α) = Bessels (α) + 0",68
Wolfers (α) = Mädlers (α) — 0",06
Wolfers (δ) = Bess. (δ) + 0",89
Wolfers (δ) = Mädlers (δ) + 0"42; hvaraf följer
Bessels (α) = Mädl. (α) — 0",7
Bessels (δ) = Mädl. (δ) — 0",5

hvilka gifva medelpositionen

328° 59′ 30",3 och —2° 50′ 21",8.

6:o) Stjernorna h), i), k), l), m) och p) i Berlinerobservat. beräknades ånyo.

I stället för Försters position på stjernan l) antager jag

345° 7′ 8",3 + 2° 59′ 10",8

endast enligt Brünnows Not. 2.

7:o) Reduktionen af stjernorna q) q′) och q″) i Berlinerobservationerna gaf

q	enligt B.Z. 29 : 3°	13′	58",7	+10°	9′	40",8
	enligt R. 51 : 3	13	49 ,4	+10	9	38 ,6
q′	enligt B.Z. 29 : 3	18	34 ,6	+10	8	10 ,1
	enligt R. 58 : 3	18	29 ,0	ej angifven		
q″	enligt B.Z. 29 : 3	24	48 ,4*)	+10	11	44 ,4
	enligt R. 64 : 3°	24′	44",9	+10°	11′	41",6.

Här är en ny bestämning serdeles önskvärd; tills vidare behöll jag Försters position.

8:o) Observationerna från Berlin i Dec. 1859 samt i Febr. och Mars 1861 äro mig enskildt meddelade från Berlin, hvarvid dock comp.stjern. ej uppgåfvos. Om observationerna 1861 säger D:r Förster i sitt bref till mig:

"Sie sind recht genau und alle Sterne scharf von mir bestimmt."

Slutligen anmärkas följande antagliga fel i Berlinerobservationerna:

1858 Dec. 17: sekunderna af $\Delta\alpha = 46''6$ i st. för 56",6

*) Om man antager ett fel i Bessels Z. = 10s eller 0h 11m 9s,42 i stället för 0h 11m 19s,42.

Differensen q—q″ bör väl vara = —10′ 49″,5
i stället för — 4′ 49″,5.

Komparationsstjernornas reduktion till observationsdagens apparenta locus utfördes ånyo, och, såväl de dervid använda konstanterna enligt Berliner Jahrbuch, som stjernornas antagna medelloca för början af observationsåret, äro angifna i följande tabell.

Konstanter för Komparationsstjernornas Reduktion till App. Locus och Stjernornas Medelloca.

Medeltid i Berlin. 1858		f	g	G	h	H	i	Medel-α	Medel-δ	Reduktion till Appar. Locus. Δα	Δδ
Sept.	15,4	+38″,56	+18″,96	332° 20′	+18″,62	97° 59′	+8″,01	325° 23′ 53″,1	— 6° 3′ 35″,8	+57″,08	+15″,91
	16,4	38 ,66	19 ,00	332 22	18 ,61	96 55	8 ,01	d:o	d:o	57 ,02	15 ,91
	16,5	38 ,67	19 ,00	332 22	18 ,61	96 49	8 ,02	d:o	d:o	57 ,02	15 ,91
	17,6	38 ,78	19 ,04	332 26	18 ,60	95 38	8 ,03	d:o	d:o	56 ,94	15 ,93
	20,6	39 ,07	19 ,15	332 38	18 ,60	92 26	8 ,03	322 35 44 ,3	5 52 8 ,0	56 ,17	15 ,06
	25,4	39 ,54	19 ,33	332 57	18 ,59	87 19	8 ,04	d:o	d:o	55 ,63	15 ,12
Okt.	15,5	41 ,59	20 ,03	334 41	18 ,83	65 54	7 ,47	323 16 2 ,4	5 5 44 ,3	52 ,38	15 ,37
	16,3	41 ,68	20 ,06	334 46	18 ,85	65 3	7 ,41	d:o	d:o	52 ,24	15 ,34
	19,3	42 ,02	20 ,17	335 5	18 ,92	61 54	7 ,24	d:o	d:o	51 ,68	15 ,27
	26,4	42 ,84	20 ,44	335 53	19 ,10	54 32	6 ,74	324 17 46 ,6	4 40 44 ,9	50 ,48	15 ,53
Nov.	4,4	43 ,98	20 ,81	336 57	19 ,35	45 21	5 ,97	326 14 36 ,3	3 50 19 ,0	49 ,05	16 ,08
	7,5	44 ,41	20 ,96	337 20	19 ,44	42 14	5 ,67	d:o	d:o	48 ,45	15 ,96
	13,3	45 ,25	21 ,25	338 3	19 ,61	36 29	5 ,05	327 44 21 ,2	3 25 41 ,4	47 ,72	16 ,30
	20,4	46 ,34	21 ,62	338 55	19 ,81	29 32	4 ,23	328 59 30 ,3	— 2 50 21 ,8	46 ,68	16 ,52
Dec.	17,3	50 ,97	23 ,38	341 38	20 ,24	4 2	0 ,61	338 7 26 ,3	+ 0 17 59 ,5	44 ,69	18 ,55
	18,3	51 ,15	23 ,45	341 42	20 ,24	3 6	+0 ,47	338 11 6 ,2	0 28 2 ,5	+44 ,44	18 ,56
1859											
Jan.	4,4	8 ,20	8 ,18	295 53	20 ,16	347 4	—1 ,96	344 16 49 ,6	2 47 5 ,7	— 1 ,87	0 ,34
	5,3	8 ,36	8 ,22	296 19	20 ,15	346 13	2 ,08	345 7 8 ,3	2 59 10 ,8	1 ,74	0 ,48
	6,2	8 ,52	8 ,25	296 43	20 ,14	345 22	2 ,20	345 37 5 ,0	3 1 34 ,3	1 ,69	0 ,49
	26,3	11 ,82	9 ,20	304 3	19 ,68	325 58	4 ,78	353 2 56 ,9	6 17 49 ,0	2 ,07	1 ,07
Febr.	18,3	14 ,90	10 ,28	309 7	19 ,02	302 34	6 ,95	3 13 53 ,9	10 9 38 ,6	2 ,13	2 ,05
	19,3	15 ,01	10 ,32	309 17	18 ,99	301 31	7 ,02	d:o	d:o	2 ,20	1 ,96
	20,3	15 ,13	10 ,37	309 27	18 ,97	300 28	—7 ,09	2 45 29 ,7	10 25 26 ,7	— 2 ,42	1 ,88
Nov.	30,4	52 ,11	23 ,43	345 30	20 ,03	20 10	+3 ,00	78 50 40 ,2	37 22 5 ,3	+93 ,13	10 ,61
Dec.	2,3	52 ,43	23 ,56	345 40	20 ,07	18 22	2 ,74	d:o	d:o	93 ,72	10 ,78
	3,3	52 ,60	23 ,63	345 45	20 ,09	17 25	2 ,61	d:o	d:o	94 ,03	10 ,88
	21,4	+55″,79	+24″,93	347° 3′	+20″,24	0° 25′	+0″,06	72° 46′ 32″,1	+36° 24′ 36″,9	+95″,77	+16″,05

För att jemföra fjerde elementsystemet med observationerna, reducerades dessa först till jordens centrum, och derefter till motsvarande rent elliptiska loca medelst anbringande af perturbationerna för Jupiter, Mars och Saturnus, med antagande af 1858 Dec. 30,0 som oskulationsepok, såsom ofvan är angifvet.

Ur min i Astr. Nachr. N:o 1287 anförda perturbationstabell (från Aug. 1858 till Mars 1861) erhöll jag genom interpolation följande resultat för hvar tionde dag under den ifrågavarande observationstiden.

ALEXANDRAS PERTURBATIONER, ENLIGT 4:de ELEMENTSYSTEMET, REFERERADE TILL MEDELEKLIPTIKAN 1860,0.

0^h Medeltid i Berlin.	ξ $=x-x_0$	η $=y-y_0$	ζ $=z-z_0$
1858 Sept. 11	— 319,3	— 30,7	— 46,2
21	263,9	23,5	39,3
Okt. 1	214,0	17,5	32,8
11	169,4	12,4	26,6
21	130,1	8,2	20,9
31	95,9	4,9	15,8
Nov. 10	66,9	2,7	11,3
20	43,0	1,3	7,4
30	24,4	0,5	4,2
Dec. 10	11,0	0,1	1,9
20	2,8	0,0	0,5
30	0,0	— 0,0	0,0
1859 Jan. 9	2,8	+ 0,1	0,5
19	11,3	0,5	2,2
29	25,7	1,4	5,1
Febr. 8	46,3	3,1	9,2
18	73,3	5,7	14,7
28	107,0	9,3	21,8
Mars 10	147,7	14,2	30,5
Nov. 25	4658,0	1011,6	1239,8
Dec. 5	4999,7	1111,6	1336,8
15	5356,5	1220,4	1438,0
25	5728,8	1339,0	1543,3
1860 Jan. 4	6117,0	1468,3	1652,7
14	6521,4	1609,3	1766,1
1861 Febr. 7	48376,1	37074,4	6370,9
17	50852,9	39440,7	6400,7
27	53468,6	41906,2	6426,7
Mars 9	56231,8	44469,8	6450,0
19	59151,8	47130,2	6472,0
29	—62238,0	+49885,1	—6494,4

De i följande tabell anförda perturbationerna för sjelfva observationsmomenten äro genom interpolation härledda ur föregående tabell.

Alexandras Pert. Ekl. 4:de Syst. Refer. t. Medelekl. 1860,0.

Medeltid i Berlin.			ξ	η	ζ
1858	Sept.	13,44	— 305,3	— 28,8	— 45,5
		15,42	294,2	27,3	43,0
		16,43	288,5	26,6	42,4
		16,49	288,2	26,5	42,3
		17,54	282,5	25,9	41,6
		20,54	266,3	23,8	39,6
		25,38	241,3	20,8	36,5
	Okt.	15,45	151,3	10,4	24,0
		16,31	147,9	10,1	23,5
		19,30	136,4	8,8	21,8
		25,33	114,7	6,7	18,6
		26,39	111,0	6,3	18,1
		30,32	98,0	5,1	16,1
	Nov.	4,37	82,6	3,8	13,7
		7,45	73,8	3,2	12,3
		13,31	58,4	2,1	9,9
		20,39	42,2	1,3	7,3
	Dec.	17,31	4,5	0,0	0,8
		18,31	4,2	— 0,0	0,6
1859	Jan.	4,35	0,8	+ 0,1	0,1
		5,26	1,1	0,1	0,2
		6,22	1,4	0,1	0,3
		26,31	21,2	1,1	4,2
	Febr.	18,27	74,1	5,8	14,9
		19,28	77,2	6,1	15,5
		20,27	80,6	6,5	16,3
	Nov.	30,35	4838,9	1064,1	1291,2
	Dec.	2,31	4906,3	1083,8	1310,3
		2,32	4906,6	1083,9	1310,4
		3,33	4951,5	1094,3	1320,3
		15,34	5368,9	1024,2	1441,5
		21,38	5592,2	1095,0	1504,7
1861	Febr.	14,57	50238,5	38856,5	6393,9
	Mars	1,53	54153,4	42545,5	6432,8
		6,33	55479,0	43775,7	6444,0
		7,34	—55762,5	+44037,4	—6446,2

Dessa perturbationer (ξ, η och ζ) skola derefter reduceras till hvarje observationsdags apparenta aeqvinoctium. Sätter jag de sålunda reducerade perturbationerna (ξ_e, η_e och ζ_e)

$$\xi_e = \xi + \Delta\xi$$
$$\eta_e = \eta + \Delta\eta$$
$$\zeta_e = \zeta + \Delta\zeta$$

så kunna, då här aldrig kommer i fråga att på en gång reducera perturbationerna för längre tider, och då dessas direkta belopp således aldrig uppstiger till en betydande qvantitet, ξ_e, η_e och ζ_e alltid med

tillfyllestgörande noggrannhet beräknas enligt de anförda formlerna, om $\varDelta \xi$, $\varDelta \eta$ och $\varDelta \zeta$ bestämmas genom

$$\begin{aligned}
\varDelta \xi &= -(\eta \, . \, \mathrm{Cos}\, i + \zeta \, . \, \mathrm{Sin}\, i \, . \, \mathrm{Cos}\, \Omega) \, . \, \varDelta\, (\Pi - \Omega) \, . \, \mathrm{Sin}\, 1'' - \\
&\quad - \eta \, . \, \varDelta \Omega \, . \, \mathrm{Sin}\, 1'' + \\
&\quad + \zeta \, . \, \mathrm{Sin}\, \Omega \, . \, \varDelta\, i \, . \, \mathrm{Sin}\, 1'' \\
\varDelta \eta &= (\xi \, . \, \mathrm{Cos}\, i - \zeta \, . \, \mathrm{Sin}\, i \, . \, \mathrm{Sin}\, \Omega) \, . \, \varDelta\, (\Pi - \Omega) \, . \, \mathrm{Sin}\, 1'' + \\
&\quad + \xi \, . \, \varDelta \Omega \, . \, \mathrm{Sin}\, 1'' - \\
&\quad - \zeta \, . \, \mathrm{Cos}\, \Omega \, . \, \varDelta\, i \, . \, \mathrm{Sin}\, 1'' \\
\varDelta \zeta &= (\xi \, . \, \mathrm{Cos}\, \Omega + \eta \, . \, \mathrm{Sin}\, \Omega) \, . \, \mathrm{Sin}\, i \, . \, \varDelta\, (\Pi - \Omega) \, . \, \mathrm{Sin}\, 1'' + \\
&\quad + \zeta \, . \, \mathrm{Cot}\, i \, . \, \varDelta\, i \, . \, \mathrm{Sin}\, 1''
\end{aligned}$$

och i närvarande fall (med undantag för observationerna i början af 1861, för hvilkas tider äfven termerna beroende af $\varDelta(\Pi - \Omega)$ och $\varDelta i$ bli märkbara) kunna till och med dessa qvant. helt enkelt beräknas enligt

$$\begin{aligned}
\varDelta \xi &= -\eta \, . \, \varDelta \Omega \, . \, \mathrm{Sin}\, 1'' \\
\varDelta \eta &= \xi \, . \, \varDelta \Omega \, . \, \mathrm{Sin}\, 1'' \\
\varDelta \zeta &= 0.
\end{aligned}$$

$\varDelta \Omega$ är här naturligen = differensen mellan apparenta nodlongituden för den tid, till hvilken man vill reducera och för den, från hvilken man utgår. Huru dess nummeriska värden erhållits, skall närmare angifvas längre ned, då jag öfvergår till efemerid-räkningen.

Följande tabell innehåller hithörande reduktionsresultat jemte $\varDelta \Omega$ för hvarje dag.

Alexandras Perturbationer i förhållande till Ekliptikan och refererade till hvarje dags sanna Aeqvinoctium.

Medeltid i Berlin.	$\Delta\Omega$	ξ_e	η_e	ζ_e
1858 Sept. 13,44	—60″,42	— 305,3	— 28,7	
15,42	60 ,20	294,2	27,2	
16,43	60 ,09	288,5	26,6	
16,49	60 ,09	288,2	26,4	
17,54	59 ,99	282,5	25,8	
20,54	59 ,68	266,3	23,7	
25,38	59 ,14	241,3	20,7	
Okt. 15,45	56 ,82	151,3	10,4	
16,31	56 ,73	147,9	10,1	
19,30	56 ,36	136,4	8,8	
25,33	55 ,57	114,7	6,7	
26,39	55 ,44	111,0	6,3	
30,32	54 ,87	98,0	5,1	
Nov. 4,37	54 ,11	82,6	3,8	
7,45	53 ,67	73,8	3,2	
13,31	52 ,70	58,4	2,1	
20,39	51 ,49	42,2	1,3	$\zeta_e = 0$
Dec. 17,31	46 ,34	4,5	0,0	
18,31	46 ,13	4,2	— 0,0	
1859 Jan. 4,35	42 ,68	0,8	+ 0,1	
5,26	42 ,48	1,1	0,1	
6,22	42 ,30	1,4	0,1	
26,31	38 ,65	21,2	1,1	
Febr. 18,27	35 ,22	74,1	5,8	
19,28	35 ,08	77,2	6,1	
20,27	—34 ,96	80,6	6,5	
Nov. 30,35	+ 6 ,51	4838,9	1063,9	
Dec. 2,31	6 ,88	4906,3	1083,6	
2,32	6 ,88	4906,6	1083,7	
3,33	7 ,07	4941,5	1094,1	
15,34	9 ,39	5369,0	1224,0	
21,38	10 ,62	5592,3	1294,7	
1861 Febr. 14,57	75 ,34	50252,3	38838,6	—6393,8
Mars 1,53	77 ,15	54168,9	42525,7	6432,7
6,33	78 ,00	55495,1	43755,2	6443,9
7,34	+78″,14	—55778,8	+44016,8	—6446,1

1861 Febr. 14 — Mars 7

$\Delta(\Pi - \Omega)$ i med. $= - 1'',8$

Δi i med. $= + 0'',44$

Derefter reducerades dessa till eqvator enligt formlerna

$$\xi_q = \xi_e$$
$$\eta_q = \eta_e \,.\, \text{Cos}\, \varepsilon - \zeta_e \,.\, \text{Sin}\, \varepsilon$$
$$\zeta_q = \zeta_e \,.\, \text{Cos}\, \varepsilon + \eta_e \,.\, \text{Sin}\, \varepsilon,$$

i hvilka ξ_q, η_q och ζ_q äro motsvarande perturbationer i förhållande

till eqvator, och ε ekliptikans apparenta obliqvitet enligt Berliner Jahrbuch.

Dessa perturbationer innehållas i följande tabell.

ALEXANDRAS APPAR. PERTURBAT. I FÖRHÅLLANDE TILL EQVATOR.

Medeltid i Berlin.	ξ_q	η_q	ζ_q
1858 Sept. 13,44		— 8,2	— 53,1
15,42		7,9	50,3
16,43		7,5	49,5
16,49		7,4	49,3
17,54		7,1	48,5
20,54		5,9	45,7
25,38		— 4,5	41,7
Okt. 15,45		+ 0,1	26,1
16,31		0,1	25,6
19,30		0,6	23,5
25,33		1,3	19,8
26,39		1,4	19,1
30,32		1,7	16,8
Nov. 4,37		2,0	14,1
7,45		2,0	12,6
13,31		2,0	9,9
20,39		1,7	7,2
Dec. 17,31	$\xi_q = \xi_q$	0,3	0,7
18,31		0,2	0,6
1859 Jan. 4,35		0,1	0,1
5,26		0,2	0,2
6,22		0,2	0,3
26,31		2,7	3,5
Febr. 18,27		11,2	11,4
19,28		11,8	11,8
20,27		12,5	12,4
Nov. 30,35		1490,0	761,0
Dec. 2,31		1515.6	770,6
2,32		1515,8	770,7
3,33		1529,3	775,6
15,34		1696,7	835.0
21,38		1786,7	— 864,9
1861 Febr. 14,57		38173,9	+ 9595,5
Mars 1,53		41571,7	11027,6
6,33		42704,1	11506.8
7,34		+42944,9	+11608,9

Slutligen erhöllos perturbationerna i ascensio recta och deklination enligt formlerna

$$\Delta\alpha . \operatorname{Cos}\delta = \frac{\operatorname{Cos}\alpha}{\Delta}\eta_q - \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\Delta}\xi_q$$

$$\Delta\delta = - \frac{\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\delta}{\Delta}\xi_q - \frac{\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\delta}{\Delta}\eta_q + \frac{\operatorname{Cos}\delta}{\Delta}\zeta_q,$$

och reduktionsresultaten angifvas i närstående tabell.

ALEXANDRAS APPAR. PERTURB. I α OCH δ.

Medeltid i Berlin.			$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
1858	Sept.	13,44	— 2″,89	— 1″,22
		15,42	2 ,78	1 ,14
		16,43	2 ,71	1 ,11
		16,49	2 ,71	1 ,11
		17,54	2 ,64	1 ,08
		20,54	2 ,45	1 ,00
		25,38	2 ,16	0 ,88
	Okt.	15,45	1 ,14	0 ,47
		16,31	0 ,10	0 ,45
		19,30	0 ,98	0 ,41
		25,33	0 ,77	0 ,32
		26,39	0 ,73	0 ,30
		30,32	0 ,62	0 ,26
	Nov.	4,37	0 ,49	0 ,20
		7,45	0 ,42	0 ,17
		13,31	0 ,30	0 ,13
		20,39	0 ,20	0 ,09
	Dec.	17,31	0 ,01	0 ,01
		18,31	0 ,01	0 ,01
1859	Jan.	4,35	0 ,00	0 ,00
		5,26	0 ,00	0 ,00
		6,22	0 ,00	0 ,00
		26,31	— 0 ,00	— 0 ,00
	Febr.	18,27	+ 0 ,08	+ 0 ,01
		19,28	0 ,10	+ 0 ,01
		20,27	0 ,11	+ 0 ,01
	Nov.	30,35	61 ,19	— 9 ,05
	Dec.	2,31	62 ,17	8 ,93
		2,32	62 ,17	8 ,93
		3,33	62 ,65	8 ,85
		15,34	67 ,58	7 ,81
		21,38	+69 ,43	7 ,21
1861	Febr.	14,57	—26 ,72	18 ,49
	Mars	1,53	+ 7 ,49	19 ,15
		6,33	+ 18 ,08	19 ,07
		7,34	+ 20″,19	—19″,03

Nu följer i ordningen att ur det ifrågavarande elementsystemet härleda planetens elliptiska geocentriska positioner för de angifna observationstiderna. Af denna efemerid-räkning anförer jag blott ett kort utdrag, men dessförinnan vill jag nämna ett par ord om härledningen af de apparenta eqvatorskonstanterna.

För efemeridräkningen har jag först reducerat alla observationstiderna till Berlins meridian, och derefter uttryckt dessa tider uti dagar och decimaldelar af dygnet. Dessa tider korrigerades derpå för aberration enligt formeln

$$\text{den korrigerade tiden} = t - 493^s{,}15 \,.\, \Delta,$$

hvarest Δ antogs bekant från föregående räkning.

Då observationernas antal ej är serdeles stort, så beräknade jag derefter direkte efemerid-loca för hvarje af dessa corrigerade Berliner-tider. Dervid härleddes således först genom de bekanta formlerna anomalia vera (= v) och log. för rad. vector (log. r) ur de oskulerande elementen.

Efemeridens α, δ och Δ erhöllos slutligen ur formlerna

$$x + X = \Delta . \operatorname{Cos} \delta . \operatorname{Cos} \alpha$$
$$y + Y = \Delta . \operatorname{Cos} \delta . \operatorname{Sin} \alpha$$
$$z + Z = \Delta . \operatorname{Sin} \delta,$$

då X, Y och Z äro de apparenta solkoordinaterna i förhållande till det axelsystem, som angifves i Berliner Jahrb., och hvilka således bestämmas enligt formlerna

$$X = R . \operatorname{Cos} \odot$$
$$Y = R . \operatorname{Sin} \odot \operatorname{Cos} \varepsilon - R.B. \operatorname{Sin} \varepsilon . \operatorname{Sin} 1''$$
$$Z = R . \operatorname{Sin} \odot \operatorname{Sin} \varepsilon + R.B. \operatorname{Cos} \varepsilon . \operatorname{Sin} 1'',$$

och för hvilkas härledning jag erhållit $\odot$, B, log. R och ε ur Berliner Jahrbuch genom interpolation. Koordinaterna x, y och z äro planetens heliocentriska i förhållande till ett system, hvars axlar äro parallela med det nyss anförda systemets, och hvilka således bestämmas enligt eqvationerna

$$x = r . \operatorname{Sin} a . \operatorname{Sin} (K + v)$$
$$y = r . \operatorname{Sin} b . \operatorname{Sin} (K' + v)$$
$$z = r . \operatorname{Sin} c . \operatorname{Sin} (K'' + v),$$

då

$$K = A + \Pi - \Omega$$
$$K' = B + \Pi - \Omega$$
$$K'' = C + \Pi - \Omega,$$

och konstanterna Sin a, Sin b, Sin c, A, B och C definieras genom

$$\operatorname{Cot} A = - \operatorname{tang} \Omega . \operatorname{Cos} i,$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Cot} B = \dfrac{\operatorname{Cos} i}{\operatorname{tang} \Omega . \operatorname{Cos} E} . \dfrac{\operatorname{Cos} (E+\varepsilon)}{\operatorname{Cos} \varepsilon} \\ \operatorname{Cot} C = \dfrac{\operatorname{Cos} i}{\operatorname{tang} \Omega . \operatorname{Cos} E} . \dfrac{\operatorname{Sin} (E+\varepsilon)}{\operatorname{Sin} \varepsilon} \end{array}\right\}, \quad \operatorname{tang} E = \frac{\operatorname{tang} i}{\operatorname{Cos} \Omega},$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Sin} a = \dfrac{\operatorname{Cos} \Omega}{\operatorname{Sin} A} \\ \operatorname{Sin} b = \dfrac{\operatorname{Sin} \Omega . \operatorname{Cos} \varepsilon}{\operatorname{Sin} B} \\ \operatorname{Sin} c = \dfrac{\operatorname{Sin} \Omega . \operatorname{Sin} \varepsilon}{\operatorname{Sin} C} \end{array}\right\}, \quad \begin{array}{l} a, b \text{ och } c \text{ alltid } < 180^\circ, \\ \operatorname{Sin} A \text{ samma tecken som } \operatorname{Cos} \Omega, \\ \operatorname{Sin} B \text{ och } \operatorname{Sin} C \text{ samma tecken som } \operatorname{Sin} \Omega, \end{array}$$

i hvilka Ω, $\Pi - \Omega$ och i äro de apparenta konstanterna för observationstiderna och ε apparenta obliqviteten för samma tider enligt Berliner Jahrbuch.

Härledningen af medelkonstanterna Ω, $\Pi - \Omega$ och i för de ifrågavarande tiderna utfördes enligt formlerna

$$\Omega' - \Omega_0 = -p + (\pi).\mathrm{Cot}\, i_0.\mathrm{Sin}\,[(P) - (\Omega_0 - p)] -$$
$$- \frac{(\pi)^2.\mathrm{Sin}\,1''}{4}.\mathrm{Sin}\,2\,[(P) - (\Omega_0 - p)]\,[1 + 2\,\mathrm{Cot}^2\, i_0]$$
$$\Pi' - \Pi_0 = -p - (\pi).\mathrm{Sin}\,[(P) - (\Omega_0 - p)]\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\, i_0;$$

och

$$i' - i_0 = (\pi).\mathrm{Cos}\,[(P) - (\Omega_0 - p)]$$

vid öfvergång till tider före 1858 Dec. 30,0.

Reduktionen till tider efter epoken verkställdes enligt

$$\Omega'' - \Omega_0 = p - (\pi).\mathrm{Cot}\, i_0.\mathrm{Sin}\,[(P) - \Omega_0] -$$
$$- \frac{(\pi)^2.\mathrm{Sin}\,1''}{4}.\mathrm{Sin}\,2\,[(P) - \Omega_0]\,[1 + 2\,\mathrm{Cot}^2\, i_0]$$
$$\Pi'' - \Pi_0 = p + (\pi).\mathrm{Sin}\,[(P) - \Omega_0]\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\, i_0$$
$$i'' - i_0 = -(\pi).\mathrm{Cos}\,[(P) - \Omega_0],$$

i hvilka formler Ω_0, Π_0 och i_0 betyda medelqvantiteterna för 1858 Dec. 30,0, Ω', Π' och i' referera sig till tider före epoken och Ω'', Π'' och i'' äro motsvarande qvant. för tider efter densamma.

De öfriga i formlerna ingående qvantiteterna äro först p = num. val. af allmänna precessionen mellan epoken och den dag, till hvilken man vill reducera, och hvilken bestämmes enligt formlerna

$$p = (t' - t).\frac{\Delta l}{\Delta \frac{t' + t}{2}}$$

$$\frac{\Delta l}{\Delta \frac{t' + t}{2}} = 50'',21129 + \frac{t' + t}{2}.0'',0002442966$$

hvarest t och t' äro antal år (och delar deraf) efter 1750, och t' > t.

(π) är vinkeln mellan de båda ekliptikorna, hvilken bestämmes genom

$$(\pi) = (t' - t).\frac{\Delta \pi}{\Delta \frac{t' + t}{2}}$$

$$\frac{\Delta \pi}{\Delta \frac{t' + t}{2}} = 0'',48892 - \frac{t' + t}{2}.0'',0000061430$$

och

$$(P) = 180^0 - \left\{8^0\,23'\,50'' + \frac{t'-t}{2}\,50'',21 - \frac{t'+t}{2}\,39'',79\right\},$$

eller (P) = longituden (räknad på ekliptikan för tiden t) för ekliptikans för tiden t′ uppstigande nod på den för tiden t.

Sedan jag sålunda enligt de angifna formlerna erhållit medelkonstanterna för observationstiderna, anbragtes på dessa nutationen i longitud enligt Berliner Jahrbuch, för att reducera dem till de ifrågavarande tidernas apparenta eqvinoktier.

Vid beräkningen af dessa konstanter hafva sista termerna i Ω:ns eqvationer alltid befunnits försvinnande små, och, på analogt sätt som här, har jag vid reduktionen af perturbationerna i det föregående funnit valörerna af Δ Ω, Δ(Π—Ω) och Δ i.

Efter denna digression återtager jag gången af räkningen, och lemnar i följande tabell en summarisk öfversigt af efemeridräkningen.

Resultater af Efemerid-Räkningen.

1858	Sept. 13,44473	15,42432	16,43164	16,49244	17,53745
v	42° 5′31″,60	42°42′11″,62	43° 0′48″,98	43° 1′56″,40	43°21′14″,00
log. r	0.3556530	0.3561944	0.3564720	0.3564888	0.3567782
K	24°53′ 7″,76	8″,00	8″,09	8″,09	8″,19
K′	289°41′25″,19	25″,45	25″,54	25″,54	25″,63
K″	308°18′47″,83	48″,00	48″,04	48″,04	48″,13
log. Sin a	9.9952343	43	44	44	44
log. Sin b	9.9317177	77	76	76	76
log. Sin c	9.7323328	28	28	28	29
⊙	170°46′40″,6	172°42′32″,4	173°41′32″,4	173°45′ 6″, 1	174°46′20″,5
B	— 0″,81	— 0″,77	— 0″,71	— 0″,70	— 0″,61
log. R	0.0023455	0.0021069	0.0019844	0.0019770	0.0018494
ε	23°27′36″,79	36″,79	36″,79	36″,79	36″,79
α	324°22′ 2″,07	324° 4′39″,23	323°56′27″,15	323°55′58″,42	323°47′57″,71
δ	—6° 3′22″,53	—6° 1′24″,77	—6° 0′23″,14	—6° 0′19″,33	—5°59′13″,67
log. Δ	0.1227421	0.1273296	0.1297461	0.1298937	0.1324592
Aberrat.tid	0d,00757	765	770	770	774

1858	Sept. 20,54186	25,37721	Okt. 15,45045	16,30844	19,29492
v	44°16′33″,44	45°45′ 8″,64	51°46′44″,70	52° 1′58″,50	52°54′50″,42
log. r	0.3576194	0.3589984	0.3650326	0.3653008	0.3662396
K	24°53′ 8″,50	9″,04	11″,26	11″,36	11″,71
K′	289°41′25″,98	26″,56	28″,97	29″,06	29″,45
K″	308°18′48″,34	48″,75	50″,44	50″,52	50″,80
log. Sin a	9.9952344	44	45	44	46
log. Sin b	9.9317176	75	73	73	72
log. Sin c	9.7323330	31	33	33	31
⊙	177°42′34″,6	182°26′49″,3	202°15′50″,9	203° 6′57″,9	206° 5′ 3″,7
B	+ 0″,16	+ 0″,24	— 0″,46	— 0″,36	+ 0″,02
log. R	0.0014813	0.0008890	9.9983955	9.9982880	9.9979178
ε	23°27′36″,79	36″,77	36″,51	36″,49	36″,43
α	323°27′38″,59	323° 3′33″,35	323°17′25″,07	323°21′54″,93	323°39′51″,49
δ	—5°55′54″,27	—5°49′54″,07	—5°11′23″,85	—5° 9′ 7″,66	—5° 0′46″,61
log. Δ	0.1401300	0.1532824	0.2145412	0.2172804	0.2268318
Aberrat.tid	0d,00788	812	935	941	962

1858	Okt. 25,33425	26,39428	30,32245	Nov. 4,36714	7,44848
v	54°41′ 2″,68	54°59′35″,44	56° 8′ 3″,12	57°35′23″,02	58°28′23″,92
log. r	0.3681650	0.3685064	0.3697806	0.3714366	0.3724580
K	24°53′12″,47	12″,61	13″,15	13″,89	14″,32
K′	289°41′30″,26	30″,42	31″,00	31″,82	32″,28
K″	308°18′51″,37	51″,50	51″,94	52″,50	52″,86
log. Sin a	9.9952346	46	46	46	47
log. Sin b	9.9317172	73	72	73	73
log. Sin c	9.7323329	30	29	28	27
⊙	212° 6′ 4″,6	213° 9′34″,2	217° 5′13″,0	222° 8′38″,1	225°14′21″,9
B	+ 0″,38	+ 0″,34	— 0″,01	— 0″,55	— 0″,63
log. R	9.9971986	9.9970769	9.9966364	9.9960895	0.9957632
ε	23°27′36″,30	36″,27	36″,18	36″,06	35″,98
α	324°26′25″,36	324°35′56″,61	325°14′31″,29	326°11′18″,55	326°49′44″,15
δ	—4°41′42″,56	—4°38′ 3″,23	—4°23′42″,04	—4° 3′20″,56	—3°49′49″,31
log. Δ	0.2461481	0.2495284	0.2620055	0.2778661	0.2874337
Aberrat.tid	0d,01006	1014	1043	1082	1106

1858	Nov. 13,31060	20,38898	Dec. 17,30466	18,30842
v	60° 8′34″,04	62° 8′18″,62	69°31′31″,62	69°47′41″,12
log. r	0.3744214	0.3768234	0.3862064	0.3865620
K	24°53′15″,24	16″,42	21″,51	21″,70
K′	289°41′33″,28	34″,55	40″,02	40″.23
K″	308°18′53″,58	54″,49	58″,33	58″,48
log. Sin a	9.9952347	48	50	50
log. Sin b	9.9317172	72	68	66
log. Sin c	9.7323326	25	31	31
⊙	231° 8′23″,9	238°16′55″,7	265°36′12″,6	266°37′31″,3
B	— 0″,17	+ 0″,50	+ 0″,61	+ 0″,62
log. R	9.9951648	9.9945106	9.9928925	9.9928593
ε	23°27′35″,84	35″,66	35″,22	35″,21
α	328°10′ 0″,70	329°58′ 7″,30	338°13′57″,09	338°34′26″,75
δ	—3°21′48″,41	—2°44′ 2″,24	+0°16′33″,39	+0°24′20″,37
log. Δ	0.3053218	0.3262779	0.3984145	0.4008528
Aberrat.tid	0d,01153	1210	1429	1437

1859	Jan. 4,34496	5,25468	6,22034	26,30581	Febr. 18,26623
v	74°17′55″,70	74°32′ 8″,78	74°47′12″,94	79°55′14″,90	85°35′ 2″,18
log. r	0.3926424	0.3929686	0.3933152	0.4005440	0.4087960
K	24°53′25″,07	25″,26	25″,45	29″,02	32″,34
K′	289°41′43″,79	43″,98	44″,19	47″,91	51″,39
K″	308°19′ 0″,87	0″,99	1″,12	3″,55	5″,73
log. Sin a	9.9952352	52	52	54	55
log. Sin b	9.9317160	59	59	48	38
log. Sin c	9.7323344	44	45	65	88
⊙	283°59′15″,1	284°54′54″,5	285°53′59″,0	306°20′38″,5	329°35′16″,5
B	— 0″,21	— 0″,11	0″.00	— 0″,26	+ 0″,16
log. R	9.9926870	9.9926944	9.9927038	9.9933777	9.9951228
ε	23°27′35″,20	35″,20	35″,21	35″,42	35″,75
α	344°37′41″,48	344°57′48″,28	345°19′13″,43	352°58′ 3″,92	2°5′43″,50
δ	+2°46′11″,90	+2°54′15″,30	+3° 2′51″,34	+6°11′30″,25	+10°3′14″,25
log. Δ	0.4394220	0.4413313	0.4433413	0.4812869	0.5159316
Aberrat.tid	0,d01570	1577	1584	1729	1872

1859	Febr. 19,27855	20,27711	Nov. 30,34498	Dec. 2,30981	2,32156	3,33177
v	85°49′43″,42	86° 4′11″,10	142° 4′50″,68	142°24′30″,44	142°24′37″,52	142°34′43″,30
log. r	0.4091584	0.4095154	0.4894404	0.4897990	0.4898012	0.4899842
K	24°53′32″,49	32″,60	54′12″,97	13″,33	13″,33	13″,52
K′	289°41′51″,53	51″,66	42′34″,66	35″,06	35″,06	35″,27
K″	308°19′ 5″,84	5″,94	35″,64	35″,92	35″,92	36″,07
log. Sin a	9.9952355	56	72	73	73	72
log. Sin b	9.9317137	37	7082	81	81	82
log. Sin c	9.7323389	90	468	67	67	68
⊙	330°36′27″,3	331°36′46″,8	248° 7′ 4″,1	250° 6′40″,1	250° 7′23″,1	251° 8′53″,9
B	+ 0″,05	— 0″,06	— 0″,30	— 0″,06	— 0″,06	+ 0″,04
log. R	9.9952213	9.9953204	9.9937837	9.9936480	9.9936472	9.9935802
ε	23°27′35″,75	35″,76	33″,28	33″,24	33″,24	33″,22
α	2°30′16″,81	2°54′31″,75	79° 7′25″,33	78°34′36″,43	78°34′24″,58	78°17′22″,63
δ	+10°13′40″,62	+10°23′59″,06	+37°30′35″,70	+37°27′14″,17	+37°27′12″,84	+37°25′14″,40
log. Δ	0.5172511	0.5185360	0.3301400	0.3295349	0.3295318	0.3293102
Aberrat.tid	0d,01878	1884	1221	1219	1219	1218

			1861			
1859	Dec. 15,34084	21,37731	Febr. 14,57486	Mars 1,52696	6,33261	7,34107
v	144°34′ 6″,50	145°33′41″,32	210°43′ 1″,00	213° 8′34″,80	213°55′42″,18	214° 5′36″,76
log. r	0.4921024	0.4931256	0.4967500	0.4944256	0.4936422	0.4934756
K	24°54′15″,79	16″,99	24°55′20″,07	21″,81	22″,64	22″,78
K′	289°42′37″,68	38″,98	289°43′46″,19	48″,01	48″,89	49″,06
K″	308°19,37″,77	38″,64	308°20′24″,95	26″,15	26″,76	26″,85
log. Sin a	9.9952374	74	9.9952403	04	04	05
log. Sin b	9.9317079	77	9.9316988	82	82	82
log. Sin c	9.7323471	75	9.7323606	13	15	16
⊙	263°21′12″,8	269°30′ 6″,1	326°23′28″,3	341°25′39″,4	346°14′17″,2	347°14′46″,4
B	— 0″,51	— 0″,77	+ 0″,40	+ 0″,57	— 0″,10	+ 0″,03
log. R	9.9929740	9.9927995	9.9948406	9.9963450	9.9969000	9.9970187
ε	23°27′33″,04	33″,00	29″,46	29″,51	29″,44	29″,45
α	74°53′59″,44	73°17′24″,68	145°16′ 6″,47	141°50′39″,38	140°52′30″,07	140°41′ 0″,60
δ	+36°49′20″,46	+36°23′32″,38	+10°23′12″,98	+10°50′58″,06	+10°58′36″,32	+11° 0′ 4″,56
log. Δ	0.3313882	0.3356971	0.3328817	0,3376908	0.3419323	0.3429721
Aberrat.tid	0d,01224	1236	1228	1242	1256	1257

Det återstår mig således blott nu att i efterföljande sjelfklara tabell gifva en sammanställning af de sökta differenserna mellan beräkning och observation, sådana de erhållits på grund af föregående räkningar.

Den i tabellen angifna aberrationstiden är ej öfverallt identisk med den, som erhölls såsom resultat af ofvan anförda efemeridräkning; differenserna äro emedlertid så små, att de ej hafva någon märkbar inverkan på de slutliga resultaten.

Resultater af Observationernas

Observations-Ort.		Obs.tid i Berlin m. t. 1858	Aberrat. tid.	Reducerad Obs.tid.	Beräknad A. R.	Observerad A. R.	Par.	— Pert.
Paris.	Sept.	13d,45230	0d,00757	13d,44473	324°22′ 2″,1	21′57″,4	0″,0	+ 2″,9
Leyden. *)		15 ,43198	766	15 ,42432	4 39 ,2	4 33 ,1	—0 ,2	2 ,8
d:o *)		16 ,43934	770	16 ,43164	323 56 27 ,2	56 23 ,7	+0 ,1	2 ,7
Berlin.		16 ,50014	770	16 ,49244	55 58 ,4	55 54 ,0	+2 ,0	2 ,7
d:o		17 ,54520	775	17 ,53745	47 57 ,7	47 52 ,6	+2 ,9	2 ,6
d:o		20 ,54974	788	20 ,54186	27 38 ,6	27 33 ,2	+2 ,4	2 ,5
d:o		25 ,38533	812	25 ,37721	3 33 ,4	3 31 ,1	0 ,0	2 ,2
d:o **)	Okt.	15 ,45980	935	15 ,45045	17 25 ,1	17 24 ,1	+2 ,3	1 ,1
d:o **)		16 ,31785	941	16 ,30844	21 54 ,9	21 57 ,2	—0 ,2	1 ,1
d:o **)		19 ,30454	962	19 ,29492	39 51 ,5	39 57 ,7	—0 ,3	1 ,0
Greenwich. **)		25 ,34431	1006	25 ,33425	324 26 25 ,4	26 26 ,1	—0 ,0	0 ,8
Berlin. **)		26 ,40442	1014	26 ,39428	35 56 ,6	35 50 ,4	+1 ,8	0 ,7
Greenwich..		30 ,33288	1043	30 ,32245	325 14 31 ,3	14 31 ,1	0 ,0	0 ,6
Königsberg.	Nov.	4 ,37796	1082	4 ,36714	326 11 18 ,6	11 22 ,4	+1 ,7	0 ,5
Berlin.		7 ,45954	1106	7 ,44848	49 44 ,2	49 41 ,5	+2 ,5	0 ,4
d:o		13 ,32213	1153	13 ,31060	328 10 0 ,7	10 0 ,3	+0 ,9	0 ,3
d:o		20 ,40108	1210	20 ,38898	329 58 7 ,3	58 5 ,0	+2 ,0	0 ,2
d:o	Dec.	17 ,31894	1428	17 ,30466	338 13 57 ,1	13 57 ,6	+1 ,0	0 ,0
d:o		18 ,32279	1437	18 ,30842	34 26 ,8	34 24 ,0	+1 ,0	0 ,0
		1859						
Berlin.	Jan.	4 ,36066	1570	4 ,34496	344 37 41 ,5	37 35 ,3	+1 ,8	0 ,0
d:o		5 ,27045	1577	5 ,25468	57 48 ,3	57 47 ,5	+1 ,1	0 ,0
d:o		6 ,23619	1585	6 ,22034	345 19 13 ,4	19 11 ,9	+1 ,8	0 ,0
d:o		26 ,32310	1729	26 ,30581	352 58 3 ,9	58 6 ,0	+1 ,6	+ 0 ,0
d:o	Febr.	18 ,28499	1876	18 ,26623	2 5 43 ,5	5 43 ,3	+1 ,5	— 0 ,1
d:o		19 ,29736	1881	19 ,27855	30 16 ,8	30 14 ,6	+1 ,5	0 ,1
d:o		20 ,29597	1886	20 ,27711	54 31 ,8	54 28 ,8	+1 ,5	0 ,1
Königsberg. *)	Nov.	30 ,35719	1221	30 ,34498	79 7 25 ,3	8 37 ,2	—2 ,4	61 ,2
d:o *)	Dec.	2 ,32200	1219	2 ,30981	79 34 36 ,4	35 50 ,2	—2 ,7	62 ,2
Berlin.		2 ,33375	1219	2 ,32156	34 24 ,6	35 29 ,6	—2 ,9	62 ,2
Königsberg. *)		3 ,34395	1218	3 ,33177	17 22 ,6	18 35 ,2	—2 ,4	62 ,7
Berlin.		15 ,35308	1224	15 ,34084	74 53 59 ,4	55 10 ,1	—2 ,1	67 ,6
Königsberg. *)		21 ,38968	1237	21 ,37731	73 17 24 ,7	18 43 ,2	—0 ,8	—69 ,4
		1861						
Berlin. *)	Febr.	14 ,58718	1232	14 ,57486	145 16 6 ,5	16 26 ,0	+1 ,3	+26 ,7
d:o *)	Mars	1 ,53942	1246	1 ,52696	141 50 39 ,4	51 30 ,4	+1 ,3	— 7 ,5
d:o *)		6 ,34519	1258	6 ,33261	140 52 30 ,1	53 34 ,4	—1 ,3	—18 ,1
d:o *)		7d,35368	0d,01261	7d,34107	140°41′ 0″,6	42′ 7″,2	—1″,1	—20″,2

*) Observationer, hvilka ej förut förekommit i räkningen.

**) Observationer, hvilka uteslötos ur räkningen vid härledningen af sista elementsystemet.

Jemförelse Med Fjerde Element-Systemet.

Geocentr. Elipt. A. R.	B—Obs. $\Delta\alpha . \cos\delta$	Beräknad Deklination.	Observerad Dekl.	Par.	— Pert.	Geoc. Ellipt. Dekl.	B—Obs. $\Delta\delta$	
0",3	+ 1",8	— 6° 3'22",5	— 6° 3'28",0	+3",9	+ 1",2	22",9	+ 0",4	1:sta Apparitionen.
35,7	+ 3,5	1 24,8	1 29,8	5,4	1,1	23,3	— 1,5	
26,5	+ 0,7	0 23,1	0 28,3	5,4	1,1	21,8	— 1,3	
58,7	— 0,3	0 19,3	0 24,3	5,3	1,1	17,9	— 1,4	
58,1	— 0,4	5 59 13,7	5 59 18,6	5,2	1,1	12,3	— 1,4	
38,1	+ 0,5	55 54,3	56 0,2	4,1	1,0	55,1	+ 0,8	
33,3	+ 0,1	49 54,1	50 0,2	4,1	0,9	55,2	+ 1,1	
27,5	— 2,4	11 23,9	11 21,5	4,3	0,5	16,7	— 7,2	
58,1	— 3,2	9 7,7	9 8,3	4,4	0,5	3,4	— 4,3	
58,4	— 6,9	0 46,6	0 51,1	4,3	0,4	46,4	— 0,2	
26,9	— 1,5	4 41 42,6	4 41 41,1	4,1	0,3	36,7	— 5,9	
52,9	+ 3,7	38 3,2	38 5,7	4,1	0,3	1,3	— 1,9	
31,7	— 0,4	23 42,0	23 46,5	4,0	0,3	42,2	+ 0,2	
24,6	— 6,0	3 20,6	3 24,4	3,8	0,2	20,4	— 0,2	
44,4	— 0,2	3 49 49,3	3 49 54,3	3,5	0,2	50,6	+ 1,3	
1,5	— 0,8	21 48,4	21 54,7	3,5	0,1	51,1	+ 2,7	
7,2	+ 0,1	— 2 44 2,2	— 2 44 6,8	3,3	0,1	3,4	+ 1,2	
58,6	— 1,5	+ 0 16 33,4	+ 0 16 30,3	2,7	0,0	33,0	+ 0,4	
25,0	+ 1,8	24 20,4	24 13,6	2,7	0,0	16,3	+ 4,1	
37,1	+ 4,4	2 46 11,9	2 46 7,4	2,4	0,0	9,8	+ 2,1	
48,6	— 0,3	54 15,3	54 15,2	2,4	0,0	17,6	— 2,3	
13,7	— 0,3	3 2 51,3	3 2 50,3	2,4	0,0	52,7	— 1,4	
7,6	— 3,7	6 11 30,3	6 11 30,5	2,2	0,0	32,7	— 2,4	
44,7	— 1,2	10 3 14,3	10 3 14,0	1,9	0,0	15,9	— 1,6	
16,0	+ 0,8	13 40,6	13 40,4	1,9	0,0	42,3	— 1,7	
30,2	+ 1,6	23 59,1	23 54,9	1,9	0,0	56,8	+ 2,3	
33,6	— 6,6	37 30 35,7	37 30 25,1	1,8	9,1	36,0	— 0,3	2:dra App.
45,3	— 7,1	27 14,2	27 2,7	2,0	8,9	13,6	+ 0,6	
24,5	+ 0,1	27 12,8	27 5,1	2,0	8,9	16,0	— 3,2	
30,1	— 6,0	25 14,4	25 4,5	1,8	8,9	15,2	— 0,8	
60,4	— 0,8	36 49 20,5	36 49 9,7	1,5	7,8	19,0	+ 1,5	
33,0	— 6,6	23 32,4	23 19,9	1,3	7,2	28,4	+ 4,0	
54,0	—46,7	10 23 13,0	10 22 22,0	2,7	18,5	43,2	+29,8	3:dje App.
84,2	—44,0	50 58,1	50 8,1	2,7	19,2	30,0	+28,1	
75,0	—44,1	58 36,3	57 48,1	2,6	19,1	9,8	+26,5	
45",9	—44",5	+11° 0' 4",6	+10°59'14",9	+2",6	+19",0	36",5	+28",1	

Härvid följande slutanmärkningar:

1:o) Observationsresultaten i September 1858 synas fullt tillfredsställande.

2:o) Af de öfriga, till första apparitionen hörande observationerna, visa i synnerhet de i Okt. 1858 jemförelsevis starka afvikelser. Innan jag emedlertid, vid härledning af nya elementer, kan bestämma mig för att utesluta en eller annan af dessa observationer, måste en ny bestämning af komparationsstjernorna föregå, hvilket arbete förste Adjunkten vid Berlins observatorium D:r Förster benäget åtagit sig.

3:o) Observationerna under andra apparitionen — i November och December 1859 — äro ej serdeles tillfredsställande. De fyra observationerna från Köningsberg visa en god öfverensstämmelse sinsemellan, men en icke obetydlig afvikelse från de två Berlinerobservationerna. Observationerna i Köningsberg utfördes visserligen med cirkelmikrometer, men denna omständighet synes mig ej tillräckligt förklara den ifrågavarande konstanta afvikelsen; och i alla händelser måste jag först ha närmare uppgifter — troligen är en ny bestämning af komparationsstjernorna nödvändig — angående Berlinerobservationerna, innan jag får anse mig kunna förklara ifrågavarande afvikelser.

4:o) Observationerna tillhörande tredje apparitionen — i början af år 1861 — äro fullt tillfredsställande, och gifva en god och säker normalort.

På grund af fjerde elementsystemets, i det föregående angifna, afvikelser från observationerna kunde man nu beräkna det system, hvilket så nära som möjligt satisfierar alla tre observerade oppositionerna. Då emedlertid fjerde systemets afvikelse från observationerna icke är så betydlig, att det icke kan användas till efemeridräkning för nästa opposition; då vidare en ny bestämning af komparationsstjernorna ej ännu kunnat erhållas, och jag ändtligen för ögonblicket af andra arbeten är förhindrad att företaga denna räkning; så uppskjuter jag tills vidare härledningen af nya element.

Förarbetena till nästa opposition, sysselsätta mig för närvarande, och jag ämnar sednare på hösten publicera dem i *Universitetets Årsskrift.*

RÄTTELSER:

Sid.	rad.		står:	läs:
Sid. 7	rad. 10	uppifr.	står: $r'_{p,} + r_p$	läs: $r_p + r'_{p,}$
— 7	— 22	uppifr.	— varda	— vara
— 10	— 9	nedifr.	— $R_p + r'_{p+\pi}$	— $r_p + r'_{p+\pi}$
— 12	— 4	uppifr.	— $(r + r'^2)^{\frac{1}{2}}$	— $(r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}}$
— 12	— 4	nedifr.	— $r_p = r'_{p+k+\frac{\pi}{2}}$	— $r_p + r'_{p+k\pi+\frac{\pi}{2}}$
— 15	— 13	uppifr.	— $(\ a).(-b)$	— $(-a).(-b)$
— 15	— 2	nedifr.	— $(r.r')_{p,+p}$	— $(r.r')_{p+p,}$
— 17	— 6	uppifr.	— $\varrho_{\varphi,}$	— $\varrho'_{\varphi,}$
— 21	— 6	nedifr.	— $(r_p)^{\mu}.(r_p)^{\mu}.(r_p)^{\mu,,}$	— $(r_p)^{\mu}.(r_p)^{\mu,}.(r_p)^{\mu,,}$
— 22	— 10	uppifr.	— $r_p = (\varrho'_{\varphi,})^m$	— $r_p = (\varrho_{\varphi})^m$
— 22	— 11	uppifr.	— $(r_p . r_p)^{\frac{1}{m}}$	— $(r_p . r'_{p,})^{\frac{1}{m}}$
— 22	— 11	uppifr.	— $\varrho_{\varphi,}$ (2 gånger)	— $\varrho'_{\varphi'}$
— 26	— 8	uppifr.	— $\varrho_{\varphi,}$	— $\varrho'_{\varphi,}$
— 28	— 11	nedifr.	— $\text{Sin}\, p_{\pi}$	— $\text{Sin}\, p_{\frac{\pi}{2}}$
— 30	— 11	nedifr.	— $\text{Sin}\, p_{\frac{\pi}{2}}$	— $r\, \text{Sin}\, p_{\frac{\pi}{2}}$
— 37	— 10	nedifr.	— (5)	— (6)
— 37	— 6	nedifr.	— $\text{Cos}\,(p,-p)$	— $\text{Cos}\,\frac{(p,-p)}{2}$
— 38	— 2	uppifr.	— och (6):	— och (6) samt likheten
— 38	— 4	uppifr.	— hvaraf följer: utgår ur texten.	
— 39	— 7	nedifr.	— $1+\varrho_{\varphi}$	— $1+\varrho_{\frac{\varphi}{m}}$
— 44	— 10	nedifr.	— kurva r_p	— kurva r_p med ett origo fixeradt af $\varrho_{\varphi,}$
— 47	14 o. 15	uppifr.	— $\text{Cos}\, 2p\ \ \text{Sin}\, 2p$	— $\text{Cos}\, 2p,\ \text{Sin}\, 2p,$
— 51	— 4	uppifr.	— $1 + e\,\text{Cos}\, P$	— $1 - e\,\text{Cos}\, P$
— 56	— 2	nedifr.	— N:o 8 (16):	— N:o 8 (6) och (9):
— 65	— 8	uppifr.	— $+\{=\}$	— $=\{+\}$
— 70	— 11	uppifr.	— r^2+2rr' etc.	— r^2-2rr' etc.
— 73	— 1	uppifr.	— $\text{Sin}\, p_{\frac{\pi}{2}}$	— $r\,\text{Sin}\, p_{\frac{\pi}{2}}$
— 77	— 7	uppifr.	— $[A^{(n)} + ($ etc.	— $A^{(n)} + [($ etc.
— 77	— 6	nedifr.	— $\text{Cos}\,(v + p,)$	— $\text{Cos}\,(v+i,)$

Sid.	133	rad.	15	nedifrån	*står:*	Fogdemakten	*läs:*	med Fogdemakten
—	136	—	8	uppifrån	—	det heter	—	heter
—	137	—	2	—	—	förordningar,	—	förordningar
—	137	—	10	—	—	rättigheter;	—	rättigheter,
—	138	—	3	nedifrån	—	Nordiska	—	Nordinska
—	183	—	4	—	—	Framköp	—	Tranköp
—	186	—	19	—	—	o. s. v."	—	o. s. v.
—	194	—	13	uppifrån	—	1	—	$^1/_2$
—	207	—	12	—	—	$x - x_0$, etc.	—	$x' - x'_0$, etc.

Pris: 2: 50.

DIGEST OF THE

LIBRARY REGULATIONS.

No book shall be taken from the Library without the record of the Librarian.

No person shall be allowed to retain more than five volumes at any one time, unless by special vote of the Council.

Books may be kept out one calendar month; no longer without renewal, and renewal may not be granted more than twice.

A fine of five cents per day incurred for every volume not returned within the time specified by the rules.

The Librarian may demand the return of a book after the expiration of ten days from the date of borrowing.

Certain books, so designated, cannot be taken from the Library without special permission.

All books must be returned at least two weeks previous to the Annual Meeting.

Persons are responsible for all injury or loss of books charged to their name.